

# **Entwicklung von Discontinuous Galerkin Verfahren höherer Ordnung auf unstrukturierten adaptiv verfeinerten Gittern inklusive Fehlerschätzung**

**Ralf Hartmann**



DLR

Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e.V.  
in der Helmholtz-Gemeinschaft

# Motivation

## Verfahren höherer Ordnung:

- ▶ Auflösen und Verfolgen von Wirbeln
  - Helikopter: Wirbelentstehung und Blatt-Wirbel Interaktion
  - Transportflugzeuge: Wirbelschleppe
- ▶ Auflösung von viskosen Randschichten
- ▶ Numerische Approximation aerodynamischer Kräfte: Auftrieb, Widerstand, (Nick-)Momente



## Fehlerschätzung:

- ▶ Verlässliche Vorhersage aerodynamischer Kräfte

## Adaptive Gitterverfeinerung:

- ▶ Gitterverfeinerung für eine bessere Auflösung von Wirbel, Randschichten, etc.
- ▶ Zielorientierte Gitterverfeinerung zur genauen Berechnung aerodynamischer Kräfte





# Die Discontinuous Galerkin Diskretisierung





# Die kompr. Euler und Navier-Stokes Gleichungen in 2D

Die kompressiblen Euler Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ v_1(\rho E + p) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ v_2(\rho E + p) \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathcal{F}^c(\mathbf{u}) = 0$$

# Die kompr. Euler und Navier-Stokes Gleichungen in 2D

Die kompressiblen Euler Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho v_1 \\ \varrho v_2 \\ \varrho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \varrho v_1 \\ \varrho v_1^2 + p \\ \varrho v_1 v_2 \\ v_1(\varrho E + p) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} \varrho v_2 \\ \varrho v_1 v_2 \\ \varrho v_2^2 + p \\ v_2(\varrho E + p) \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathcal{F}^c(\mathbf{u}) = 0$$

Die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathcal{F}^c(\mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathcal{F}^v(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{f}_1^v(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{21} \\ \tau_{11}v_1 + \tau_{12}v_2 + \kappa T_{x_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^v(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{12} \\ \tau_{22} \\ \tau_{21}v_1 + \tau_{22}v_2 + \kappa T_{x_2} \end{pmatrix}.$$



# DG Diskretisierung der kompr. Euler Gleichungen

Das Problem:

$$\nabla \cdot \mathcal{F}^c(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

mit  $\mathbf{u} = (\varrho, \varrho v_1, \varrho v_2, \rho E)^T$ .

Die DG( $p$ ) Diskretisierung: Finde  $\mathbf{u}_h$  in  $\mathbf{V}_h^p$ , sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \equiv & \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left\{ - \int_{\kappa} \mathcal{F}^c(\mathbf{u}_h) : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\kappa \setminus \Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{u}_h^-, \mathbf{n}_\kappa) \mathbf{v}_h^+ \, ds \right\} \\ & + \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{u}_h^+), \mathbf{n}_\kappa) \mathbf{v}_h^+ \, ds = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^p, \end{aligned}$$

wobei

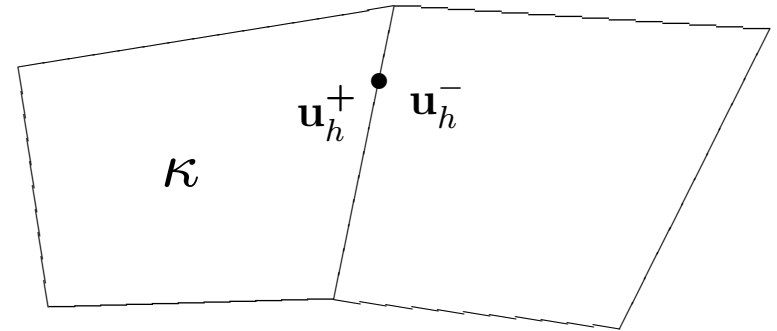
$$\mathbf{V}_h^p = \left\{ \mathbf{v} \in [L_2(\Omega)]^4 : \mathbf{v}|_{\kappa} \in [\mathcal{Q}_p(\kappa)]^4 \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \right\},$$

# DG Diskretisierung der kompr. Euler Gleichungen

Das Problem:

$$\nabla \cdot \mathcal{F}^c(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

mit  $\mathbf{u} = (\varrho, \varrho v_1, \varrho v_2, \rho E)^T$ .



Die DG( $p$ ) Diskretisierung: Finde  $\mathbf{u}_h$  in  $\mathbf{V}_h^p$ , sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \equiv & \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left\{ - \int_{\kappa} \mathcal{F}^c(\mathbf{u}_h) : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\kappa \setminus \Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{u}_h^-, \mathbf{n}_{\kappa}) \mathbf{v}_h^+ \, ds \right\} \\ & + \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{u}_{\Gamma}(\mathbf{u}_h^+), \mathbf{n}_{\kappa}) \mathbf{v}_h^+ \, ds = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^p, \end{aligned}$$

wobei

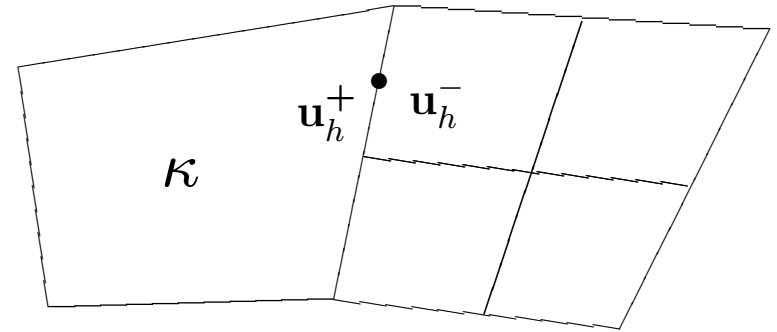
$$\mathbf{V}_h^p = \left\{ \mathbf{v} \in [L_2(\Omega)]^4 : \mathbf{v}|_{\kappa} \in [\mathcal{Q}_p(\kappa)]^4 \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \right\},$$

# DG Diskretisierung der kompr. Euler Gleichungen

Das Problem:

$$\nabla \cdot \mathcal{F}^c(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

mit  $\mathbf{u} = (\varrho, \varrho v_1, \varrho v_2, \rho E)^T$ .



Die DG( $p$ ) Diskretisierung: Finde  $\mathbf{u}_h$  in  $\mathbf{V}_h^p$ , sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \equiv & \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left\{ - \int_{\kappa} \mathcal{F}^c(\mathbf{u}_h) : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\kappa \setminus \Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{u}_h^-, \mathbf{n}_{\kappa}) \mathbf{v}_h^+ \, ds \right\} \\ & + \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{u}_{\Gamma}(\mathbf{u}_h^+), \mathbf{n}_{\kappa}) \mathbf{v}_h^+ \, ds = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^p, \end{aligned}$$

wobei

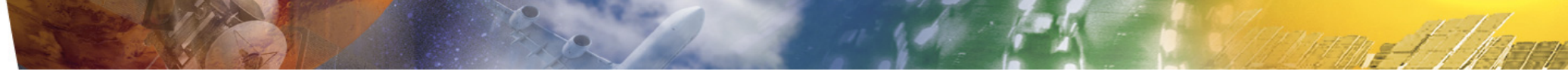
$$\mathbf{V}_h^p = \left\{ \mathbf{v} \in [L_2(\Omega)]^4 : \mathbf{v}|_{\kappa} \in [\mathcal{Q}_p(\kappa)]^4 \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \right\},$$



# Eigenschaften von DG Verfahren

$$\mathcal{N}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \equiv \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left\{ - \int_{\kappa} \mathcal{F}^c(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\kappa \setminus \Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{u}_h^-, \mathbf{n}_{\kappa}) \mathbf{v}_h^+ \, ds \right\} \\ + \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{u}_{\Gamma}(\mathbf{u}_h^+), \mathbf{n}_{\kappa}) \mathbf{v}_h^+ \, ds = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^p,$$

- ▶ **Verallgemeinerung von Finite Volume Verfahren**
  - DG nutzt numerische Flüsse, hat eine lokale und globale Erhaltungseigenschaft (ist konservativ)
  - DG(0) entspricht dem Basis Finite Volumen Verfahren
- ▶ Höhere Ordnung durch Erhöhung des Polynomgrads  $p$ , keine Rekonstruktion
- ▶ Unstrukturierte Gitter, lokale Verfeinerung, hängenden Knoten erlaubt
- ▶ Kommunikation benachbarter Zellen nur durch numerische Flüsse, gut für Parallelisierung und für hp-Verfeinerung
- ▶ DG ist FEM, daher Fehlerschätzung, ziel-orientierte Verfeinerung, etc.



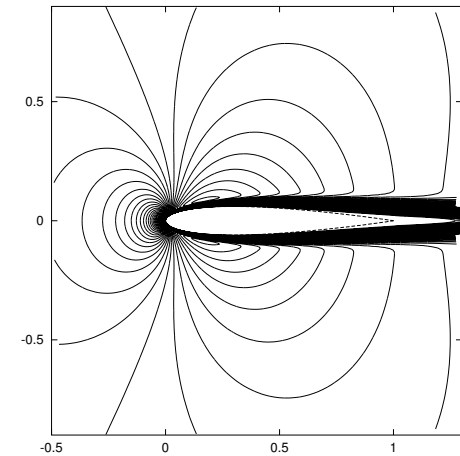
# Ergebnisse von Verfahren höherer Ordnung



# Laminarer Testfall

## Strömung um das NACA0012 Profil:

$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$ .

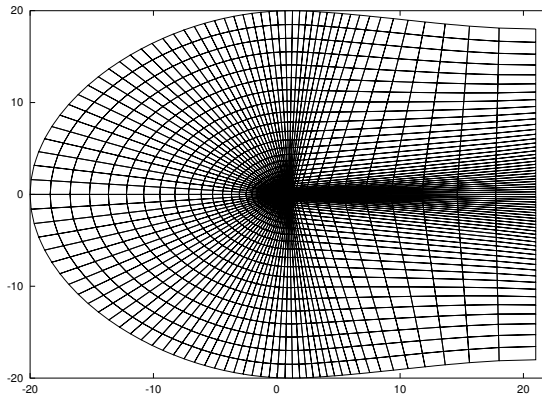


# Laminarer Testfall

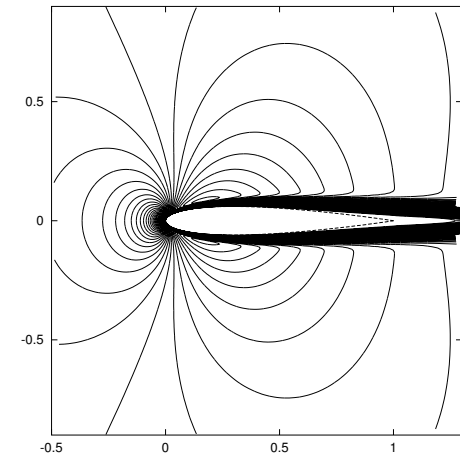
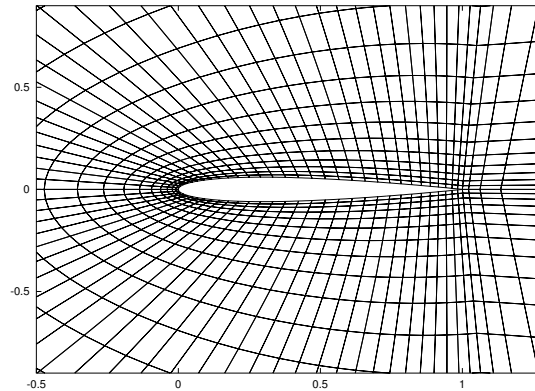
Strömung um das NACA0012 Profil:

$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$ .

Gitter (3072 Zellen):



Zoom des Gitters:

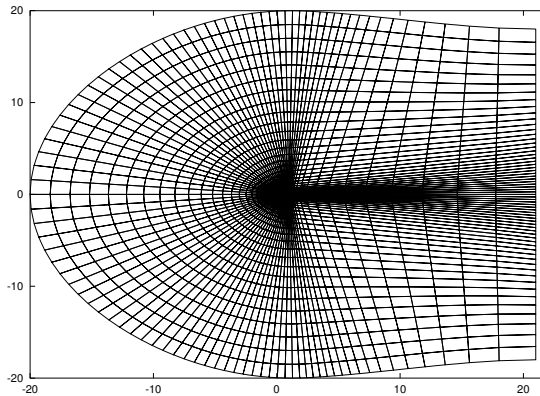


# Laminarer Testfall

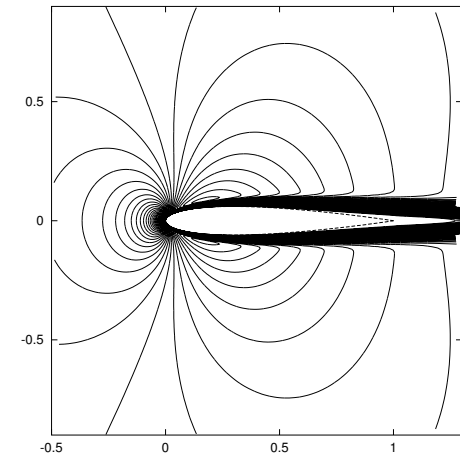
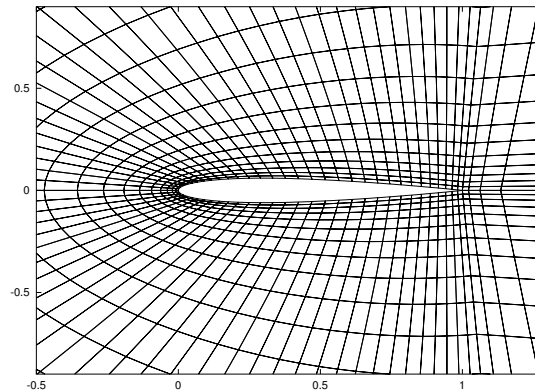
**Strömung um das NACA0012 Profil:**

$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$ .

**Gitter (3072 Zellen):**



**Zoom des Gitters:**



**Rechnungen basierend auf  $DG(p)$ ,  $p = 1, 2, 3$  auf einer Folge von global verfeinerten Gittern mit 3072, 12288, 49152 und 196608 Zellen.**





# Simulation höherer Ordnung für laminaren Testfall

$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$  Strömung um das NACA0012 Profil.

Konvergenz von cdp und cdf unter globaler Verfeinerung, siehe [Hartmann,Houston2006]

cdp (druckbasierter Widerstandsbeiwert)



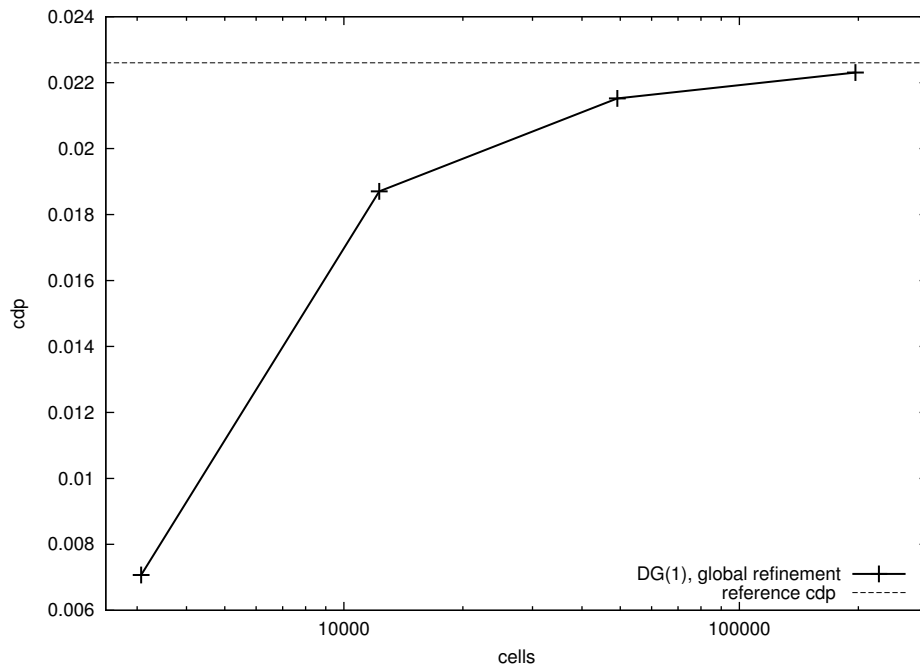


# Simulation höherer Ordnung für laminaren Testfall

$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$  Strömung um das NACA0012 Profil.

Konvergenz von cdp und cdf unter globaler Verfeinerung, siehe [Hartmann,Houston2006]

cdp (druckbasierter Widerstandsbeiwert)

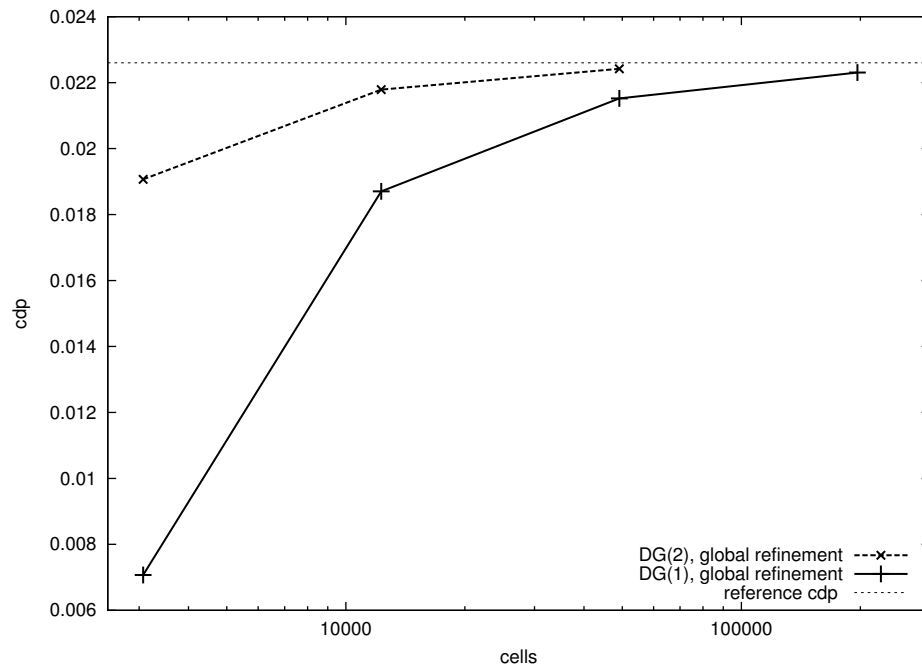


# Simulation höherer Ordnung für laminaren Testfall

$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$  Strömung um das NACA0012 Profil.

Konvergenz von cdp und cdf unter globaler Verfeinerung, siehe [Hartmann,Houston2006]

cdp (druckbasierter Widerstandsbeiwert)

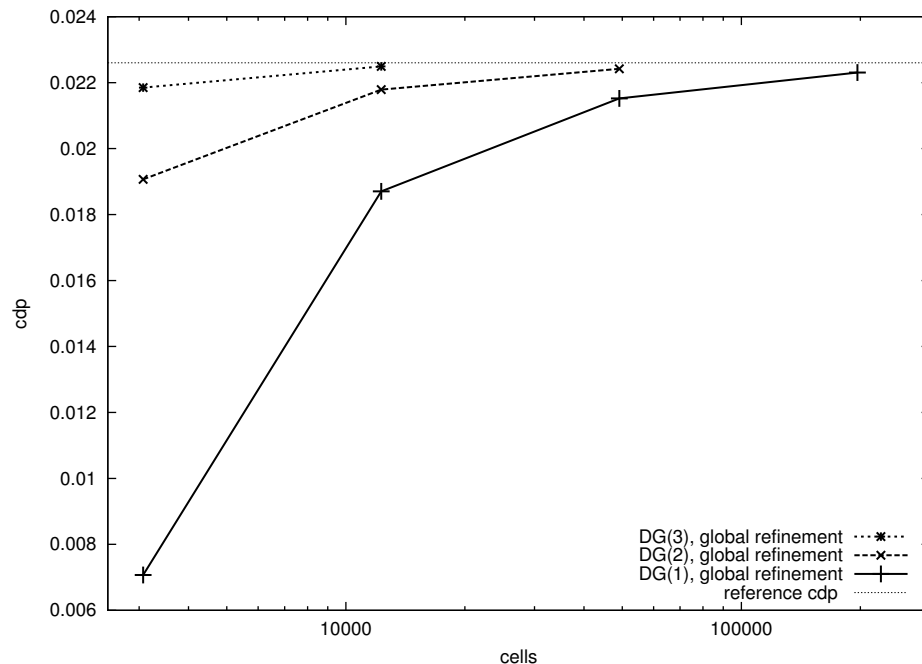


# Simulation höherer Ordnung für laminaren Testfall

$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$  Strömung um das NACA0012 Profil.

Konvergenz von cdp und cdf unter globaler Verfeinerung, siehe [Hartmann,Houston2006]

cdp (druckbasierter Widerstandsbeiwert)

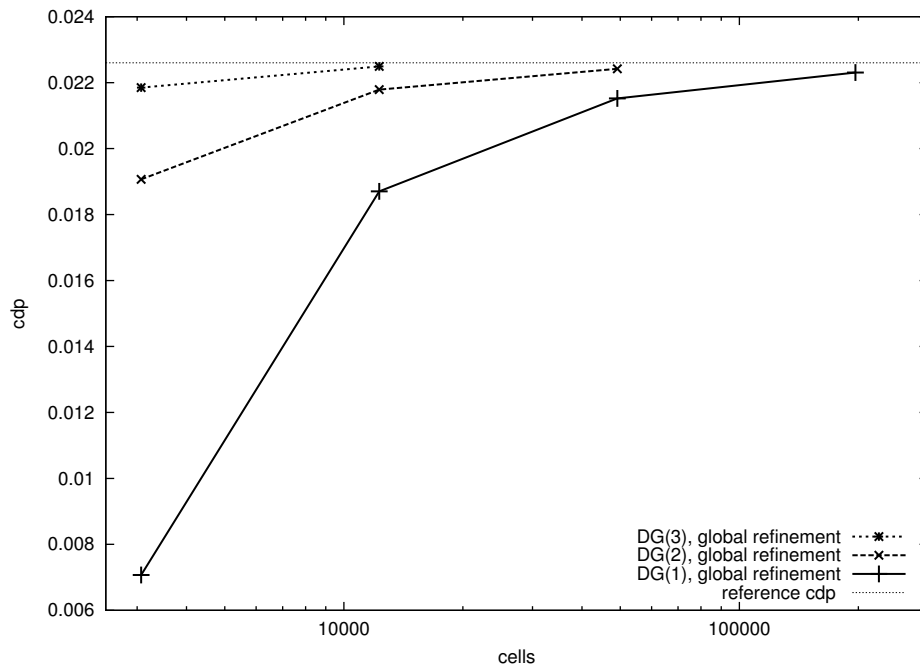


# Simulation höherer Ordnung für laminaren Testfall

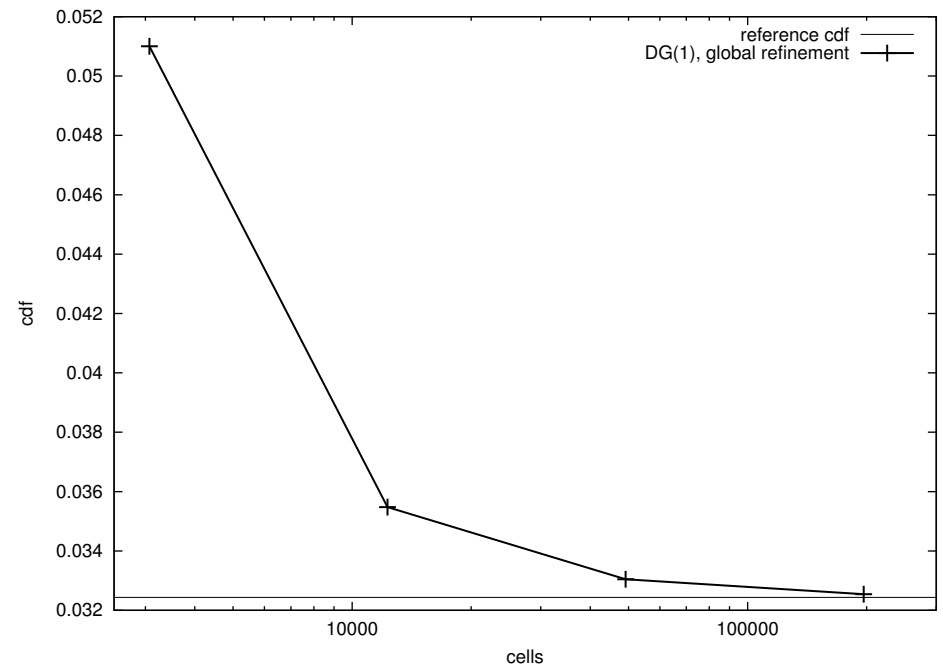
$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$  Strömung um das NACA0012 Profil.

Konvergenz von cdp und cdf unter globaler Verfeinerung, siehe [Hartmann,Houston2006]

## cdp (druckbasierter Widerstandsbeiwert)



## cdf (viskoser Widerstandsbeiwert)

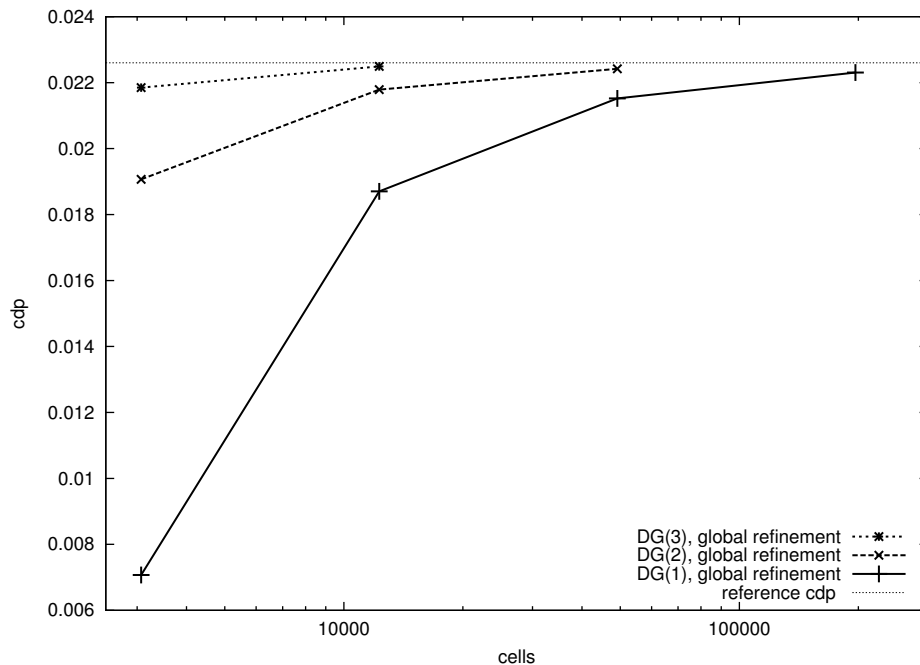


# Simulation höherer Ordnung für laminaren Testfall

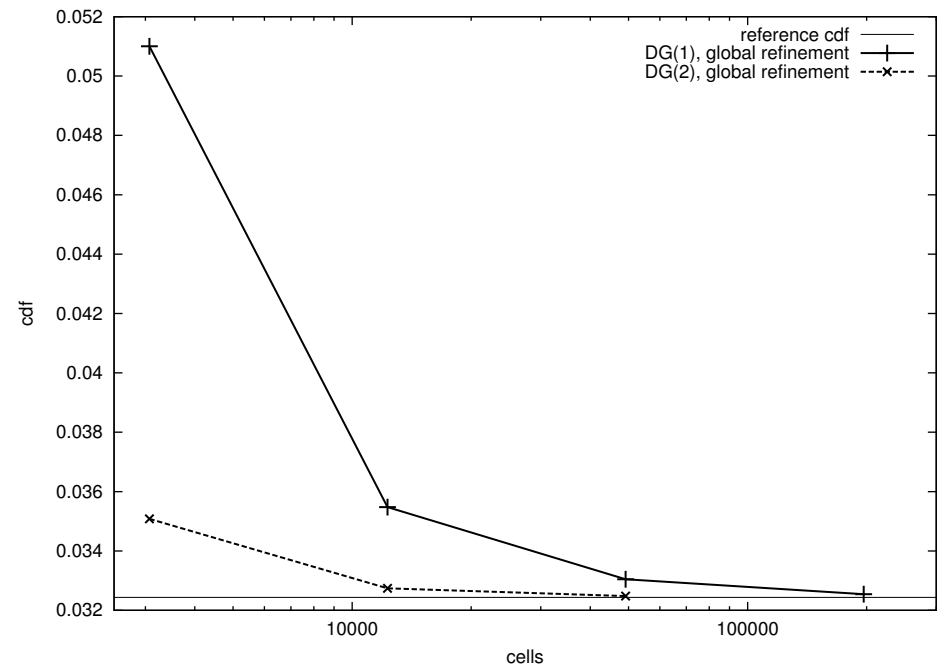
$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$  Strömung um das NACA0012 Profil.

Konvergenz von cdp und cdf unter globaler Verfeinerung, siehe [Hartmann,Houston2006]

## cdp (druckbasierter Widerstandsbeiwert)



## cdf (viskoser Widerstandsbeiwert)

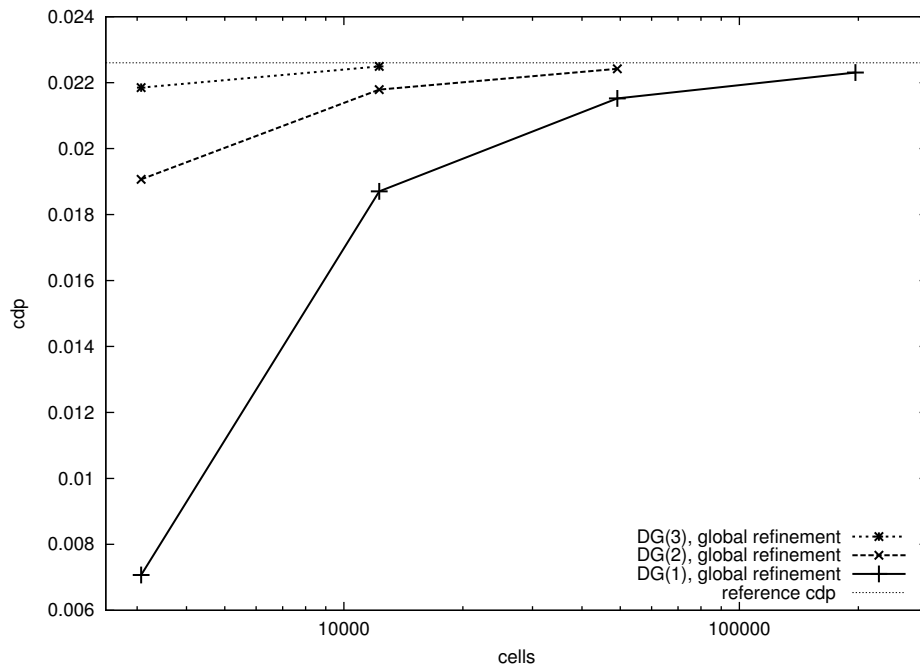


# Simulation höherer Ordnung für laminaren Testfall

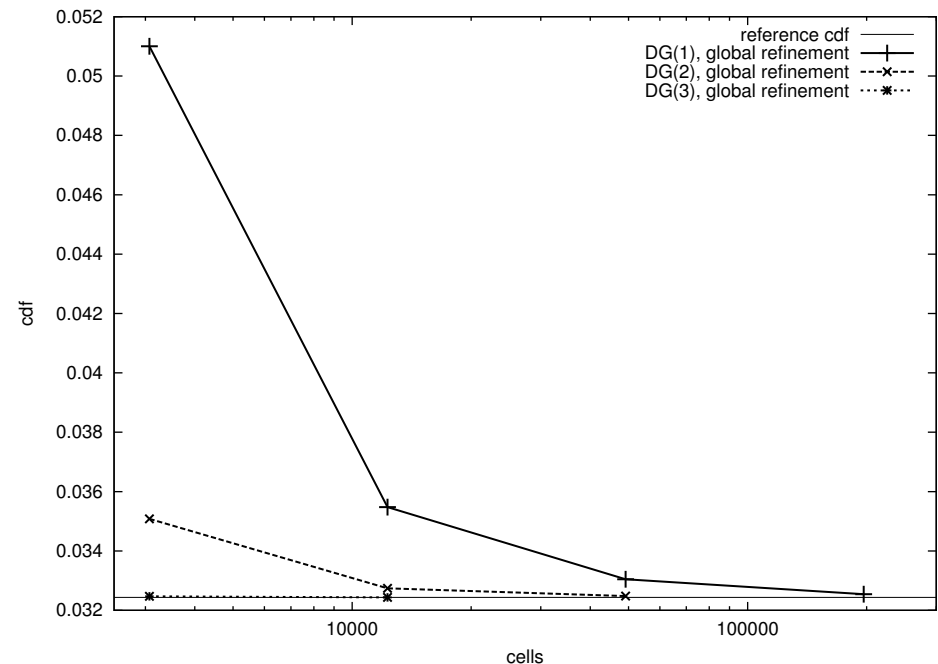
$M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$  Strömung um das NACA0012 Profil.

Konvergenz von cdp und cdf unter globaler Verfeinerung, siehe [Hartmann,Houston2006]

## cdp (druckbasierter Widerstandsbeiwert)



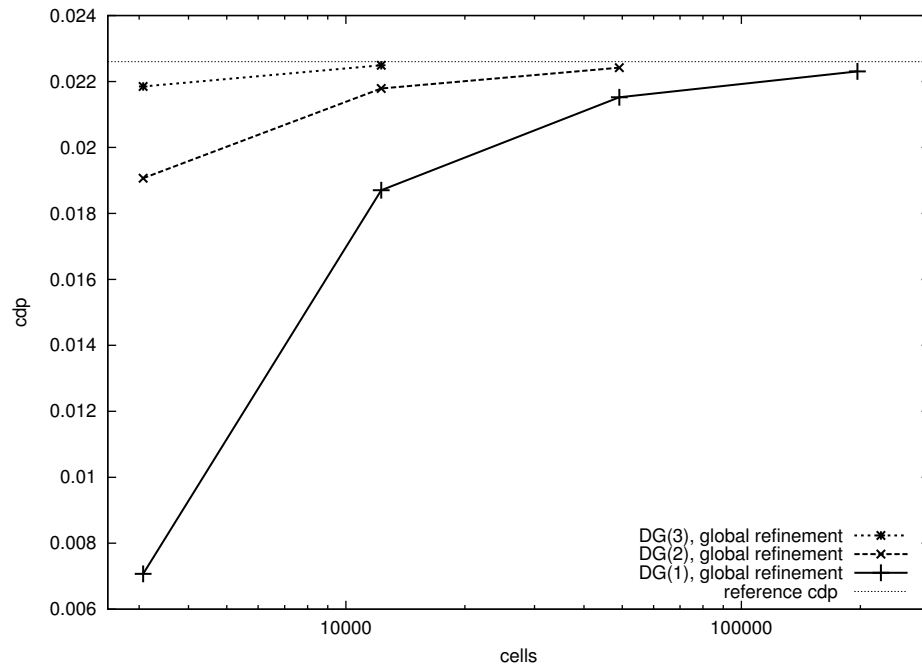
## cdf (viskoser Widerstandsbeiwert)





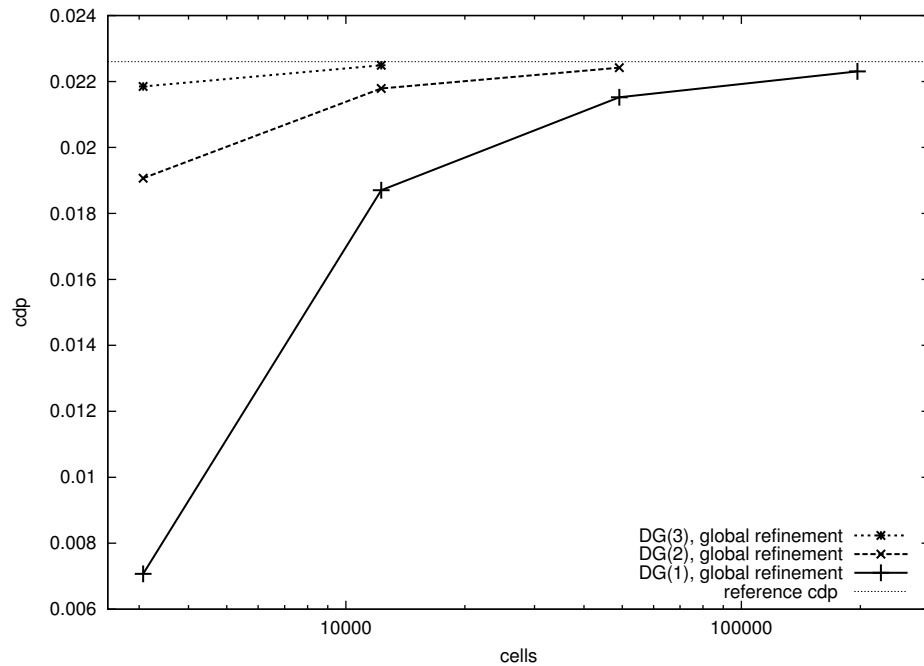
# Konvergenz von cdp

cdp

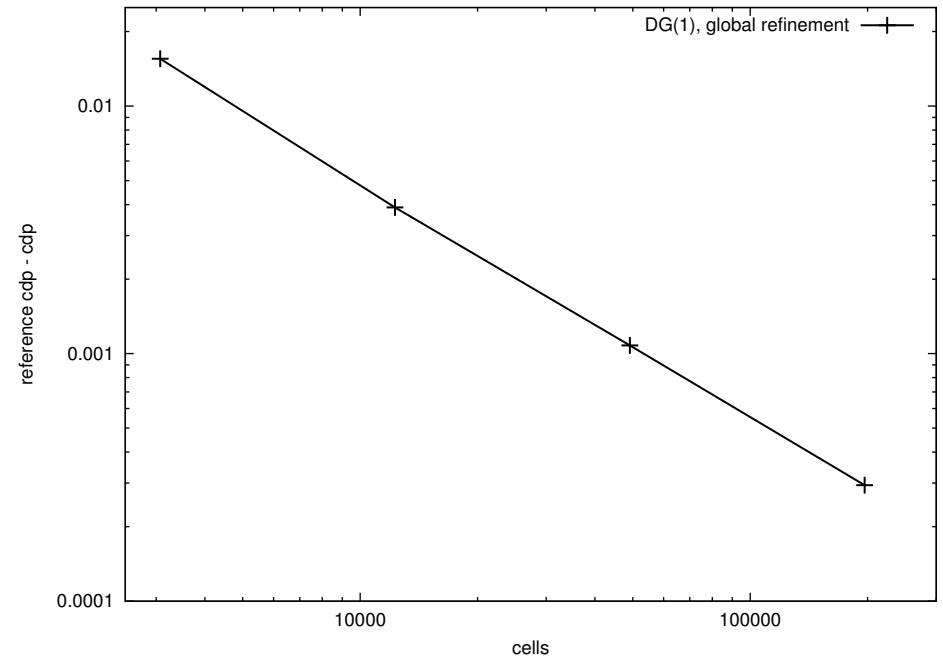


# Konvergenz von cdp

## cdp

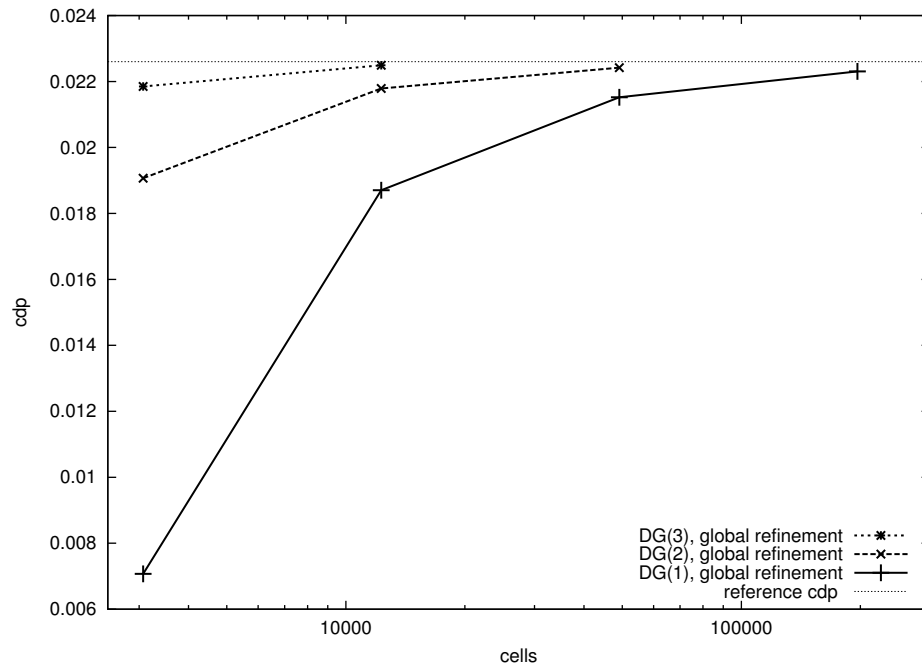


## Referenz cdp - cdp

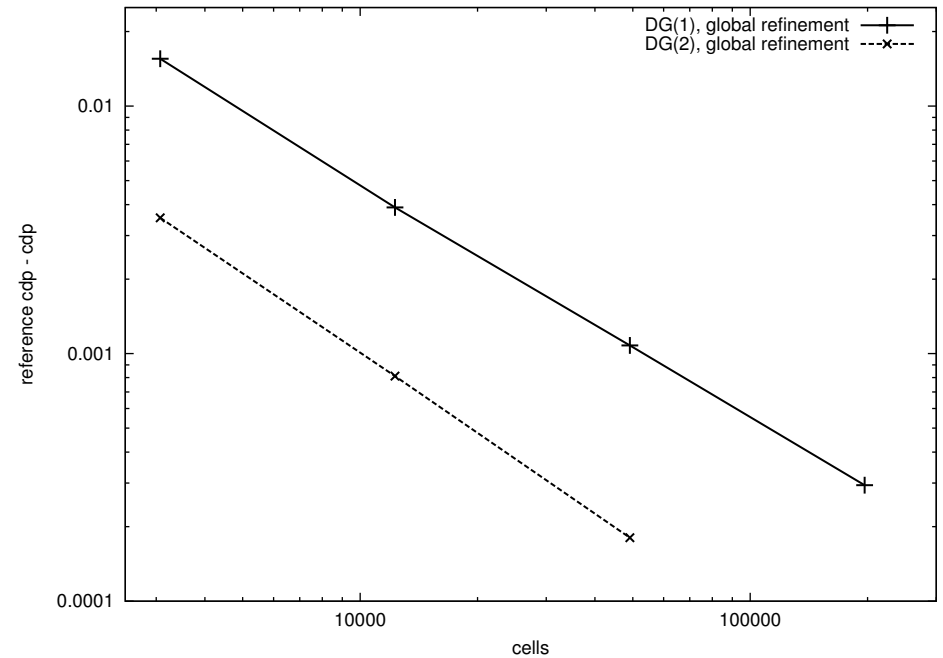


# Konvergenz von cdp

## cdp

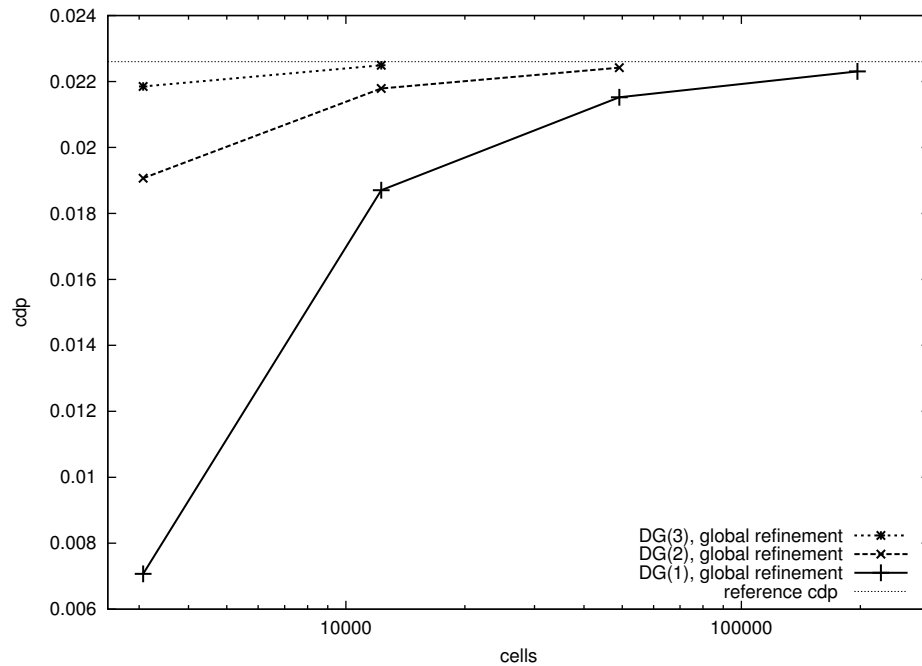


## Referenz cdp - cdp

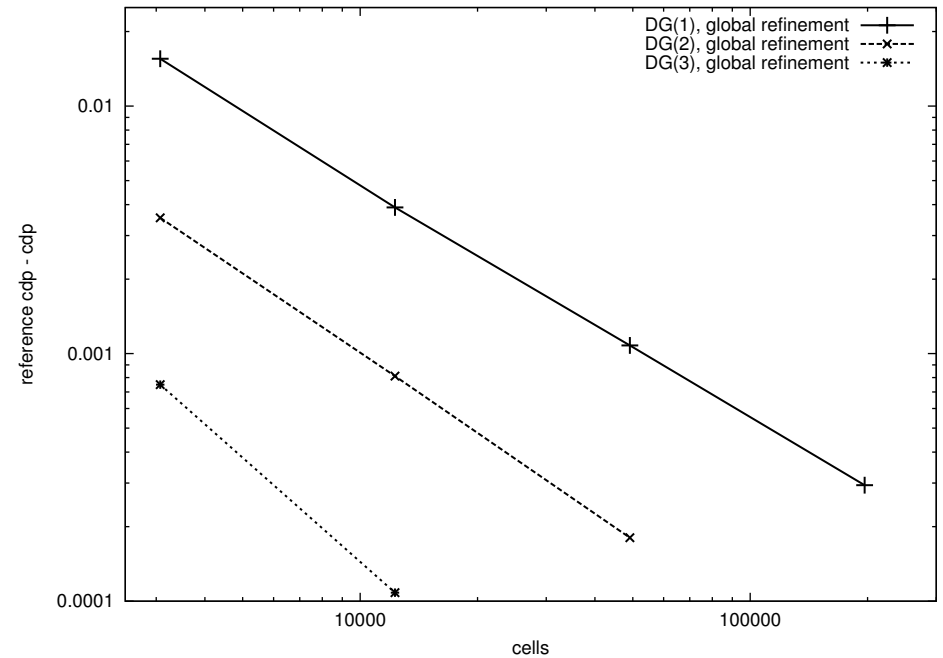


# Konvergenz von cdp

## cdp

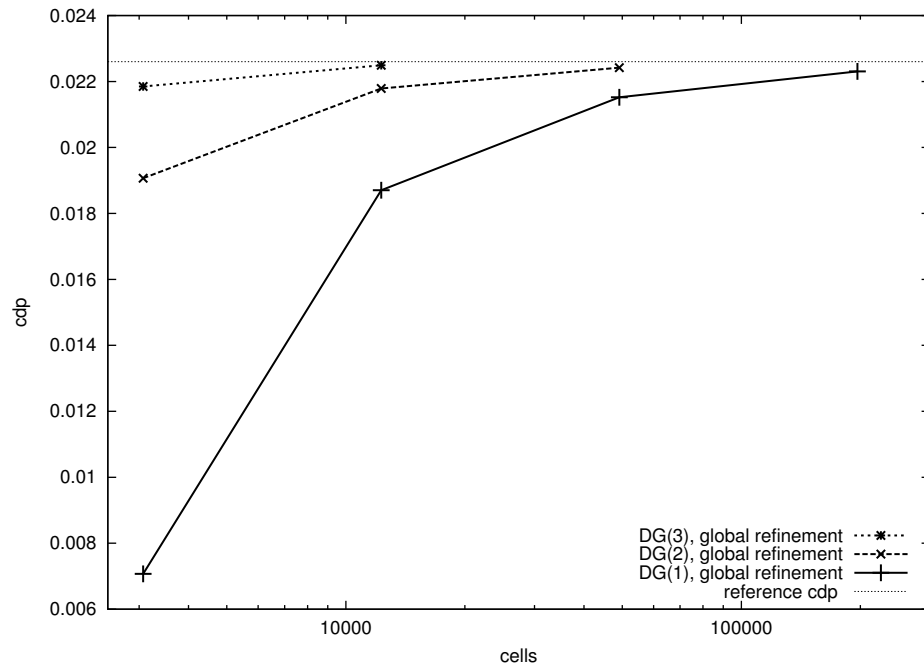


## Referenz cdp - cdp

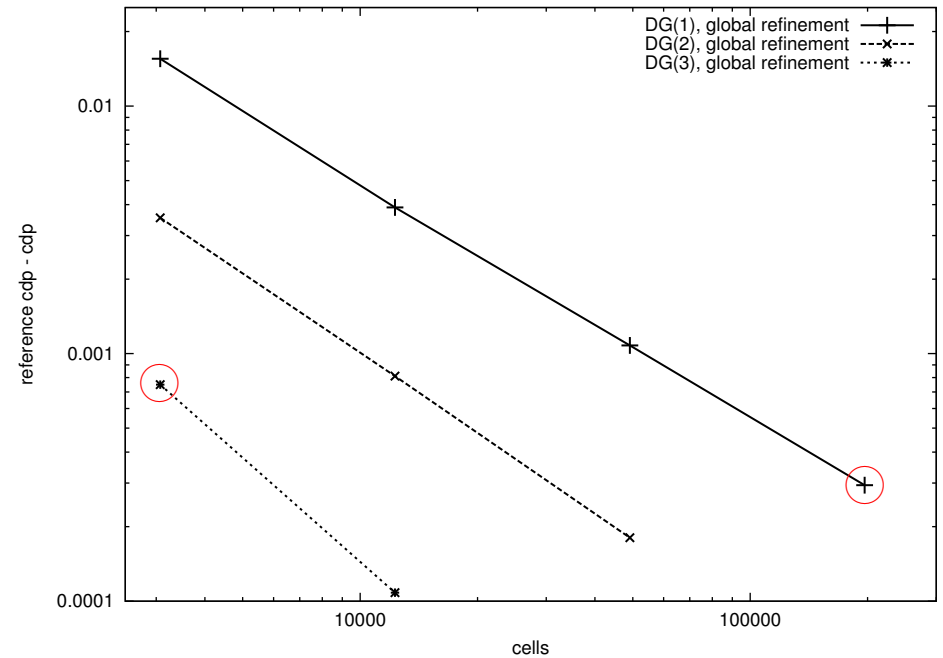


# Konvergenz von cdp

cdp

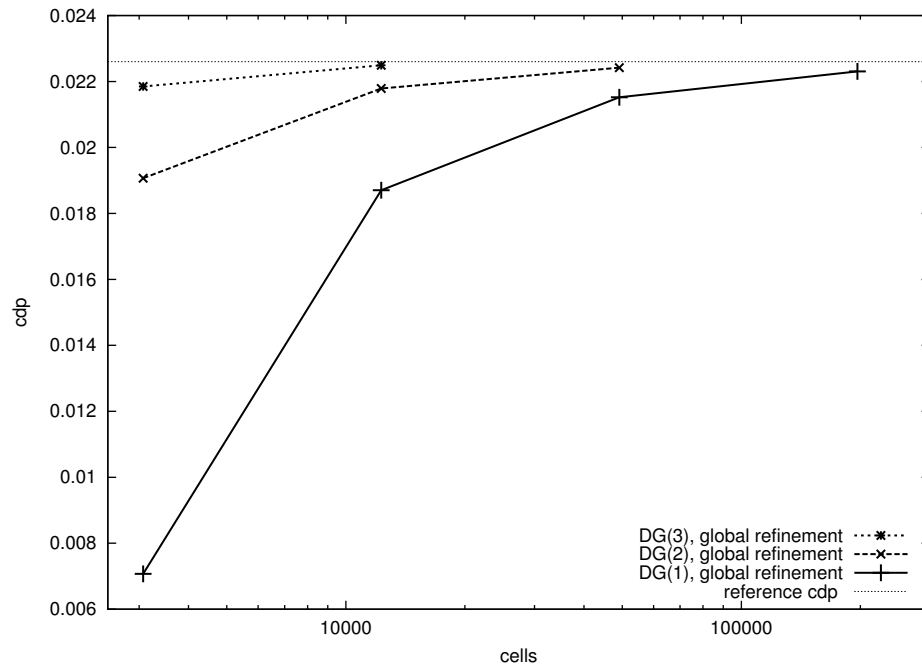


Referenz cdp - cdp

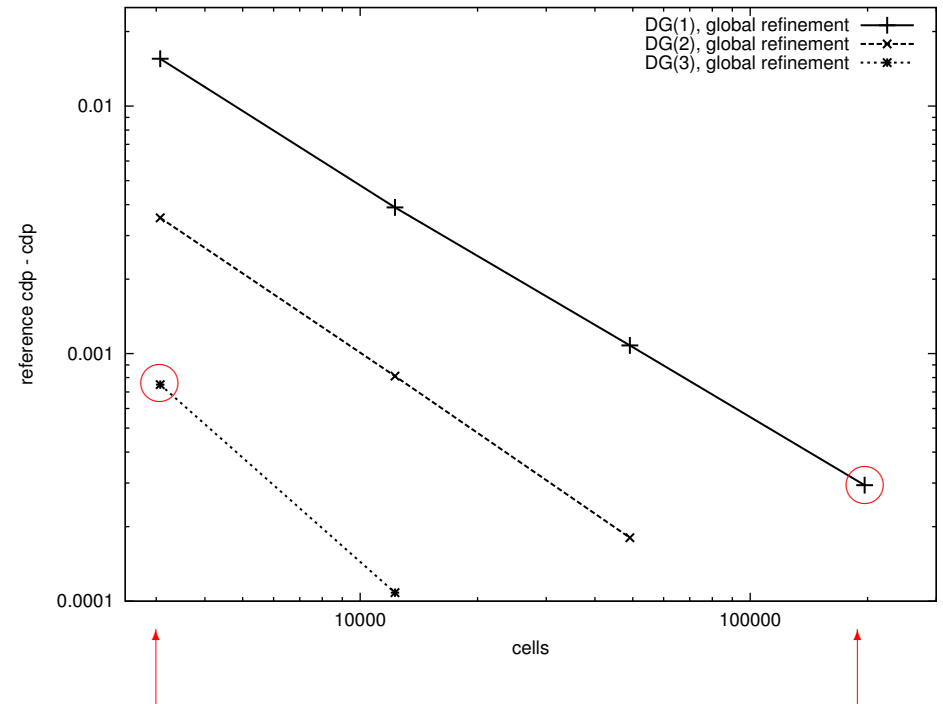


# Konvergenz von cdp

cdp



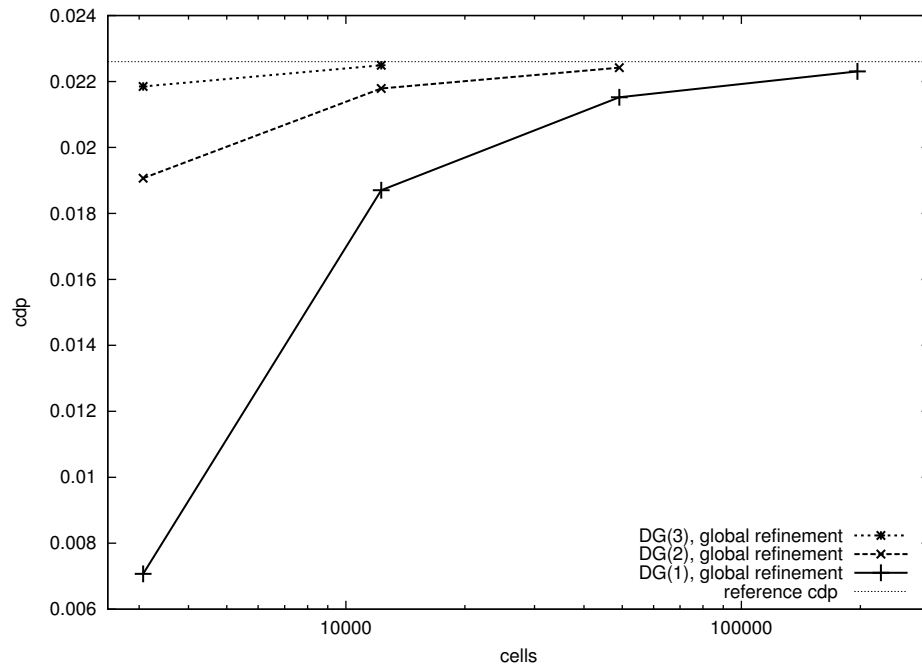
Referenz cdp - cdp



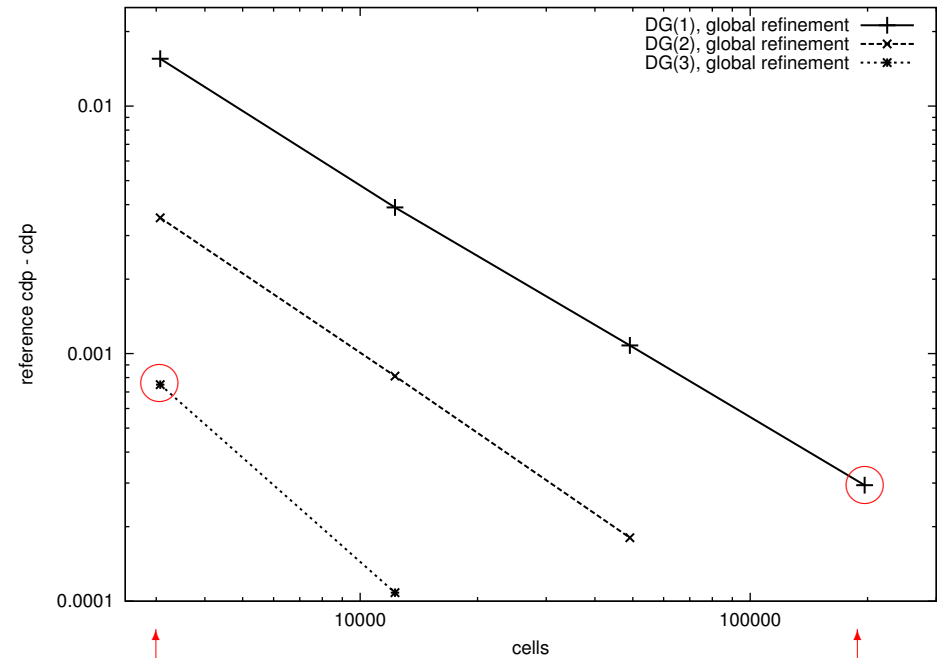


# Konvergenz von cdp

cdp



Referenz cdp - cdp

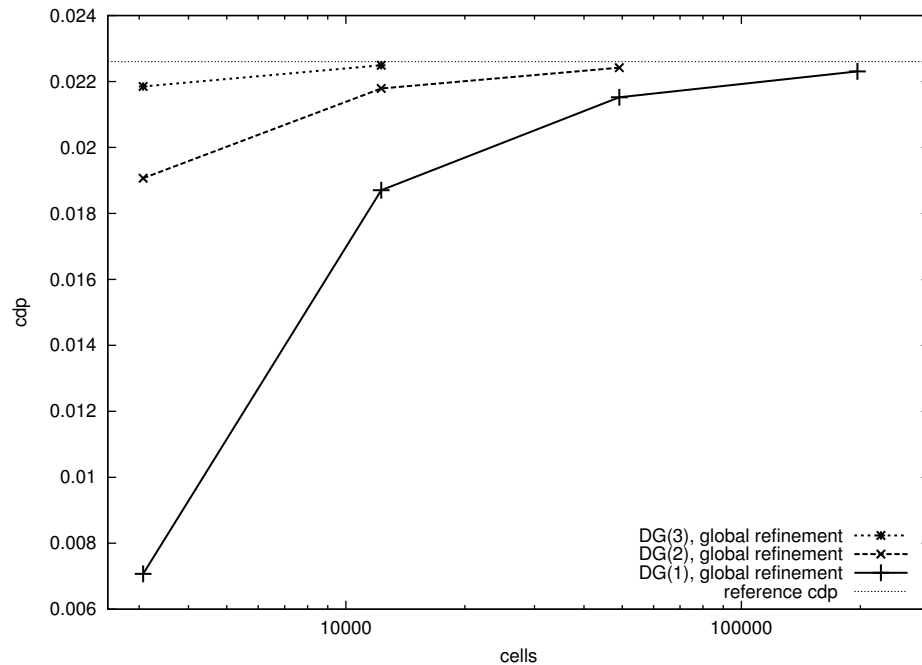


3.072 cells

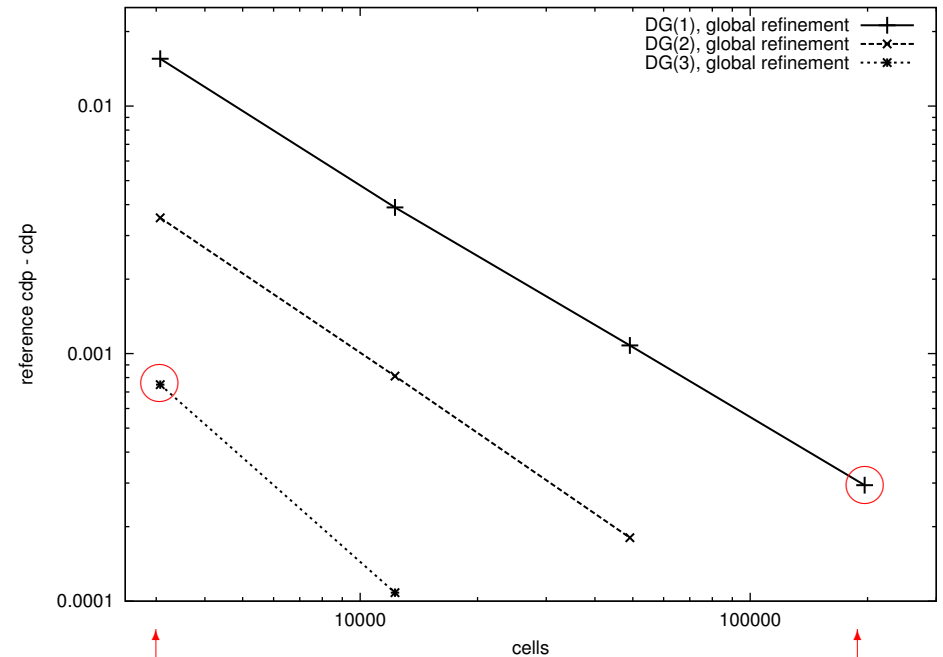
196.608 cells

# Konvergenz von cdp

cdp



## Referenz cdp - cdp



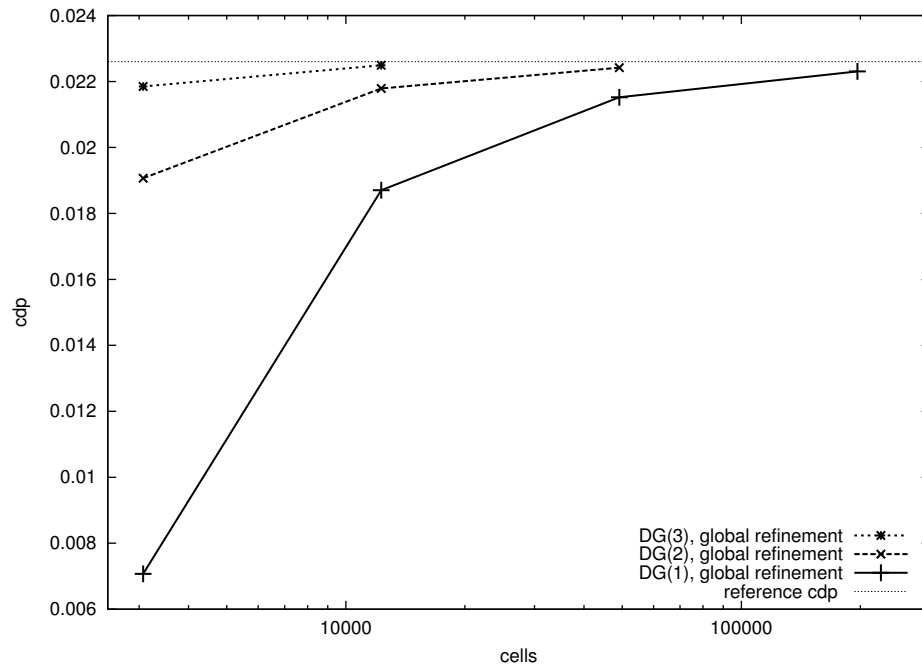
**3.072 cells**  
**196.608 dof**

**196.608 cells**  
**3.145.728 dof**

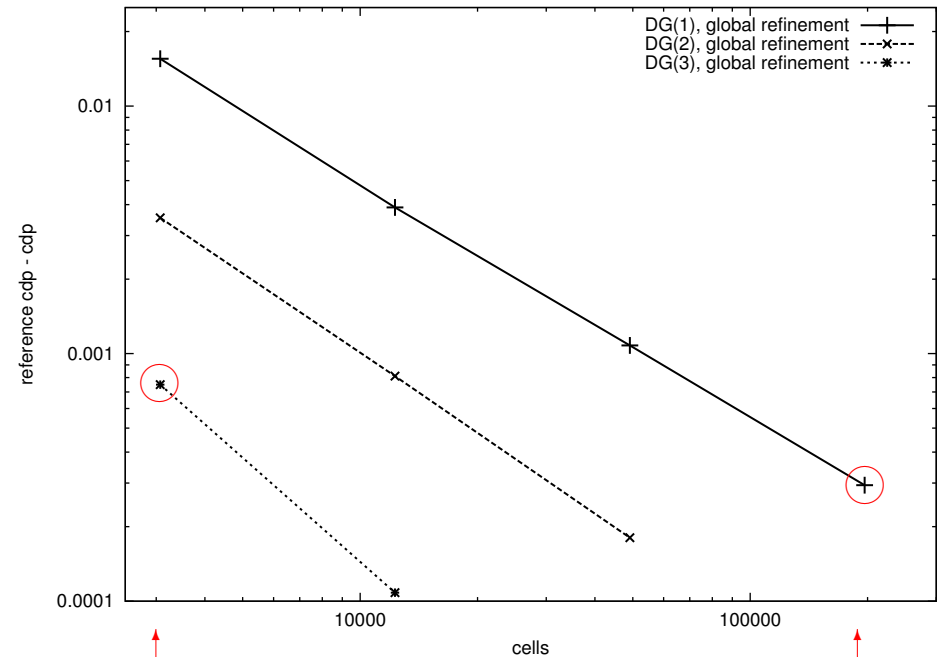


# Konvergenz von cdp

cdp



Referenz cdp - cdp



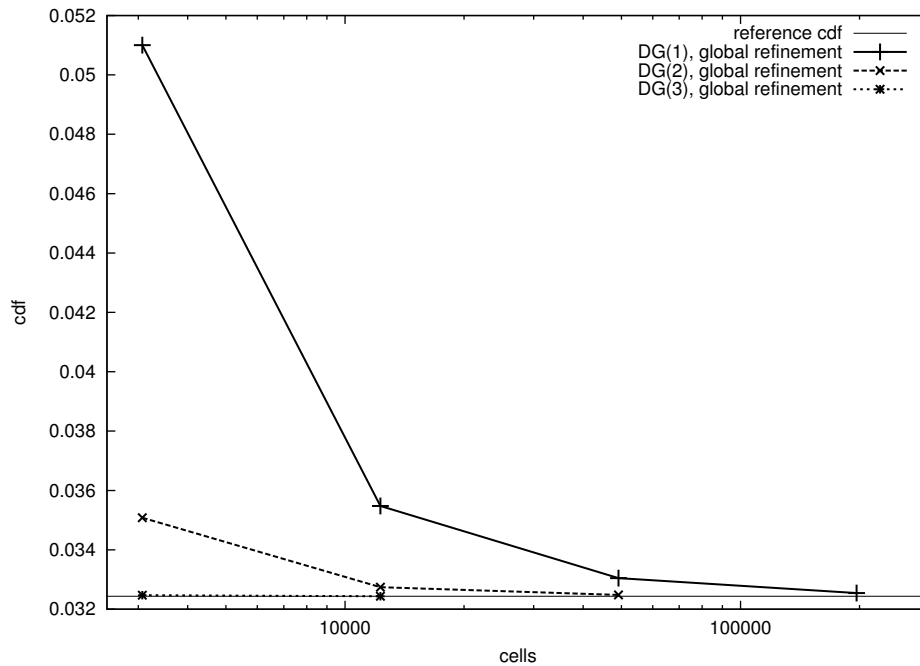
**3.072 cells**  
**196.608 dof**  
**2 min**

**196.608 cells**  
**3.145.728 dof**  
**34 min**



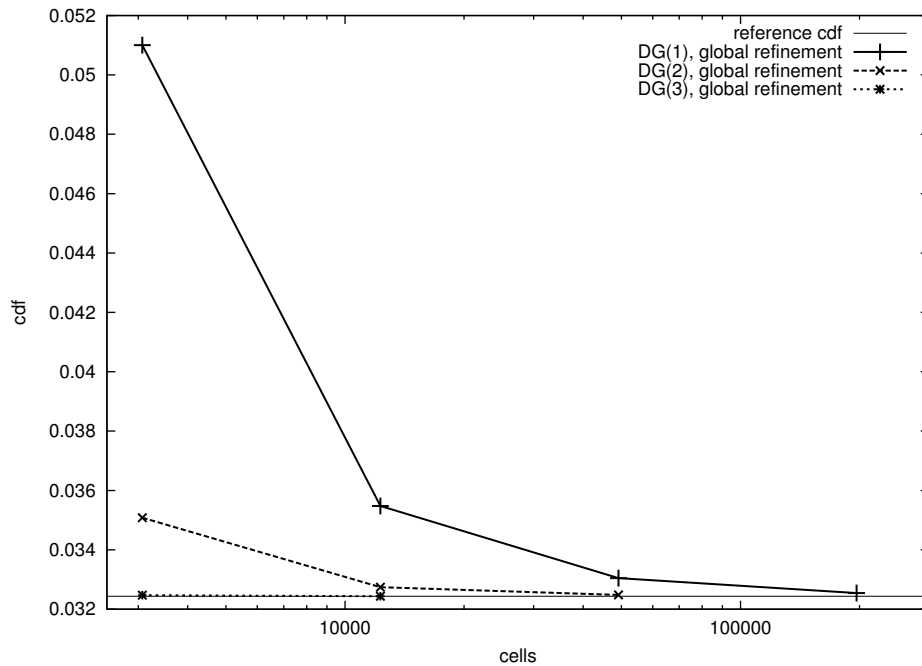
# Konvergenz von cdf

cdf

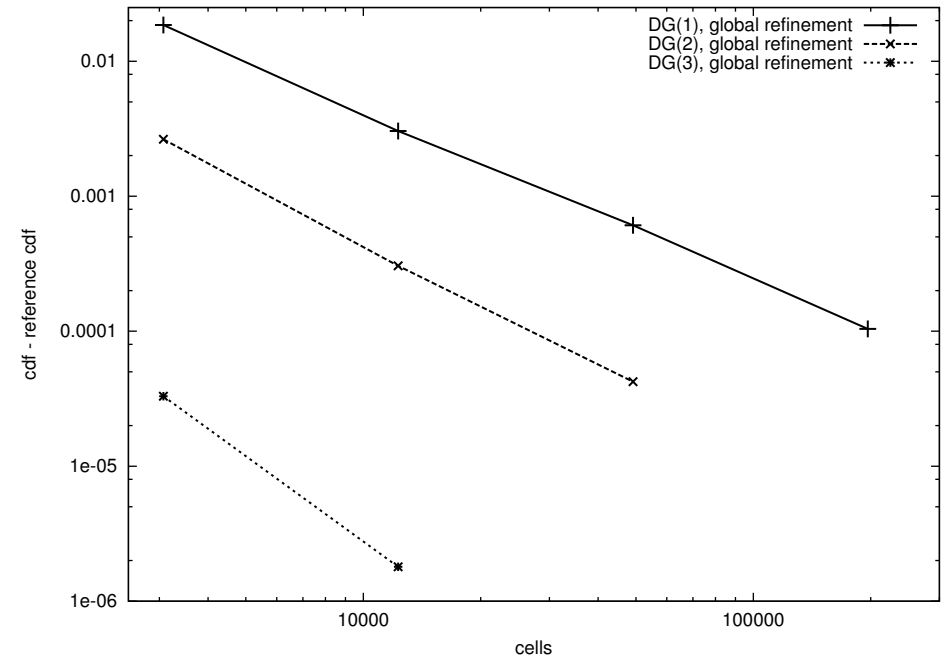


# Konvergenz von cdf

## cdf

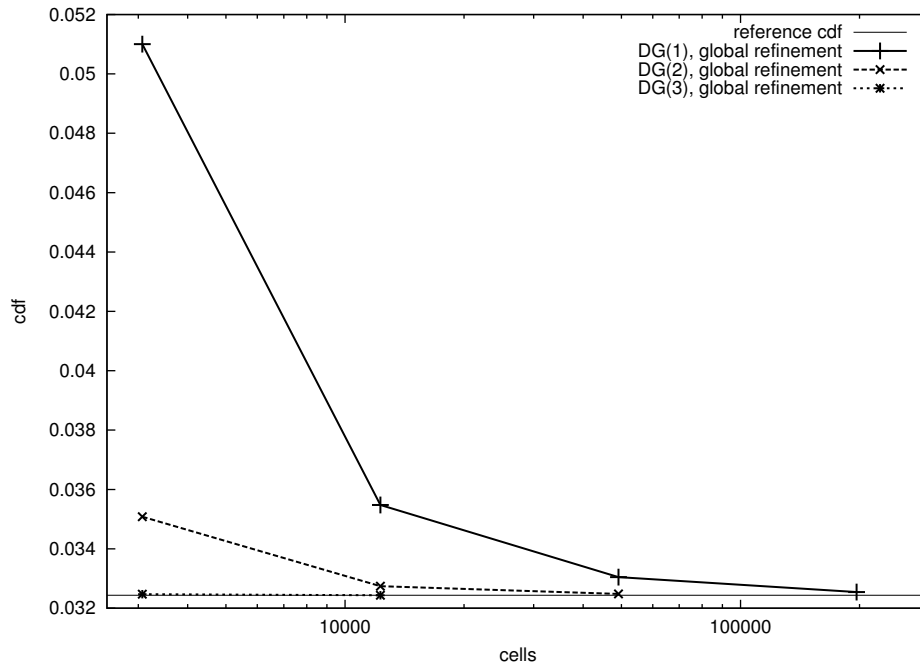


## cdf - Referenz cdf

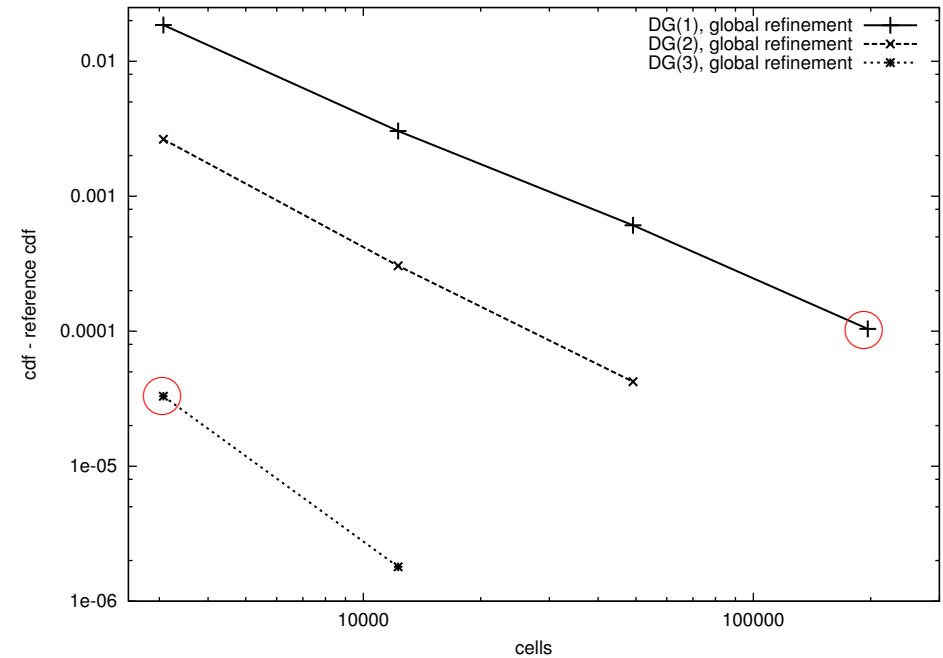


# Konvergenz von cdf

cdf



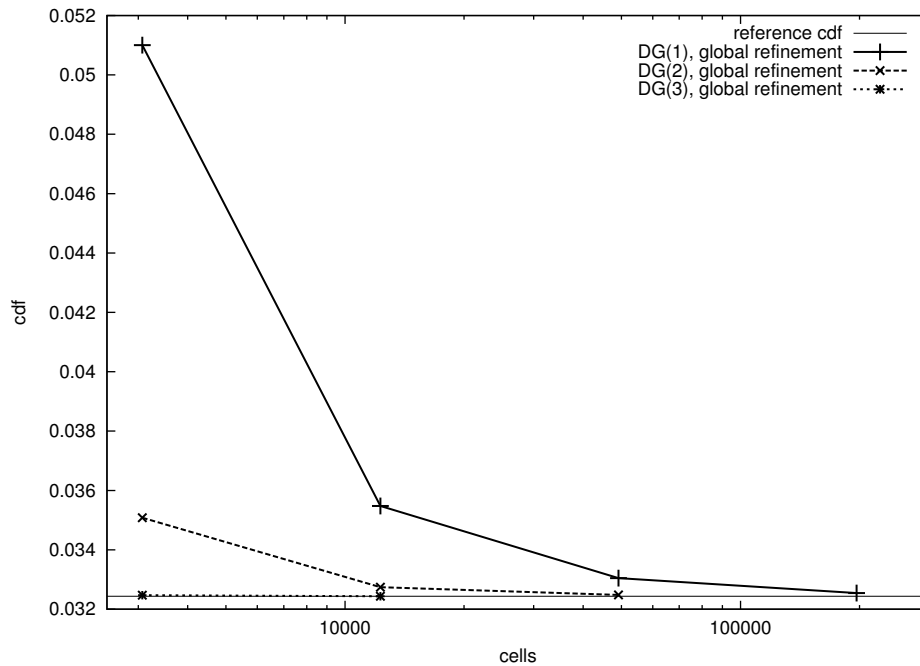
cdf - Referenz cdf



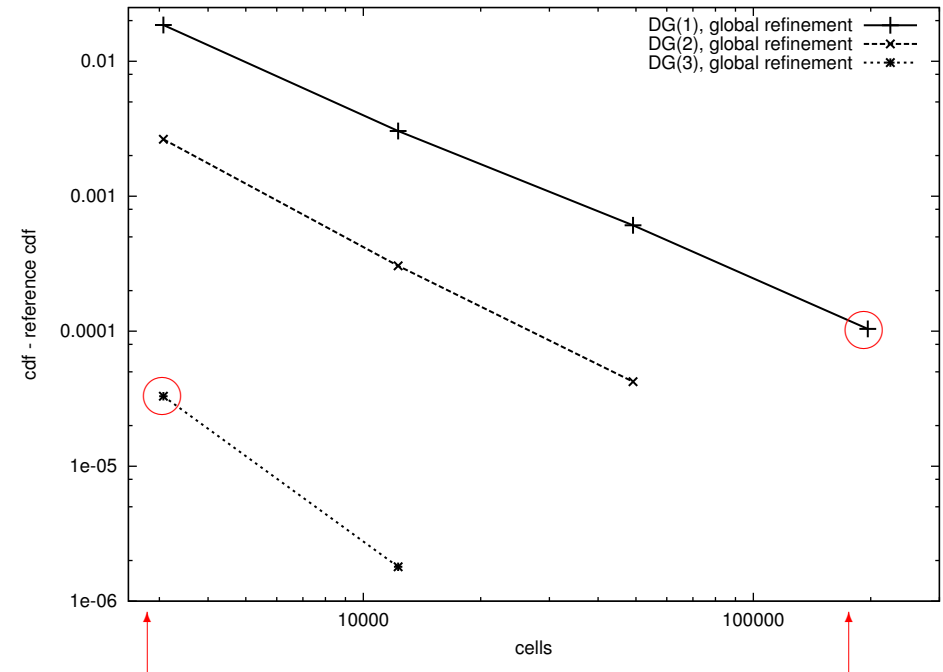


# Konvergenz von cdf

cdf

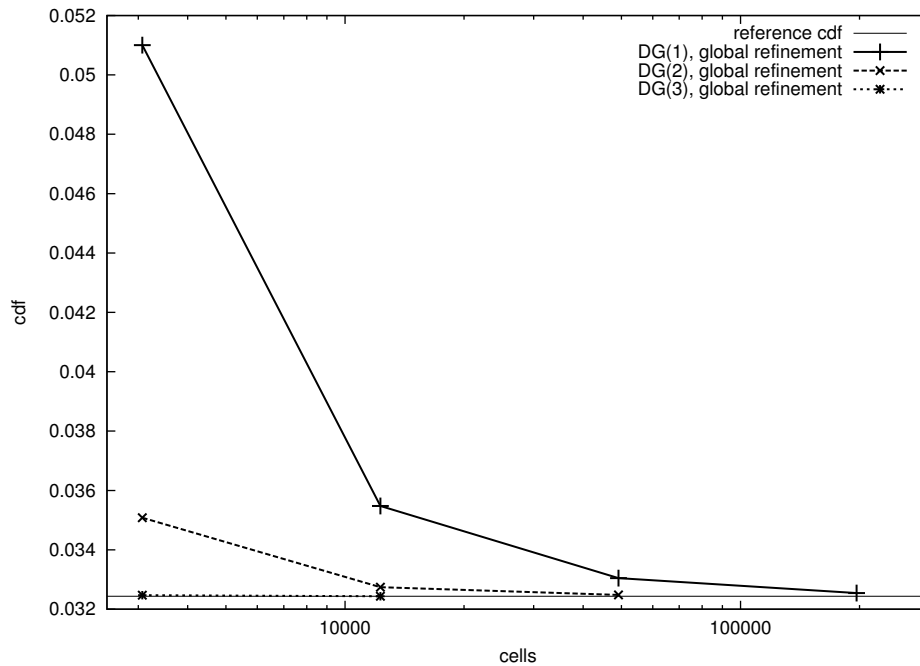


cdf - Referenz cdf

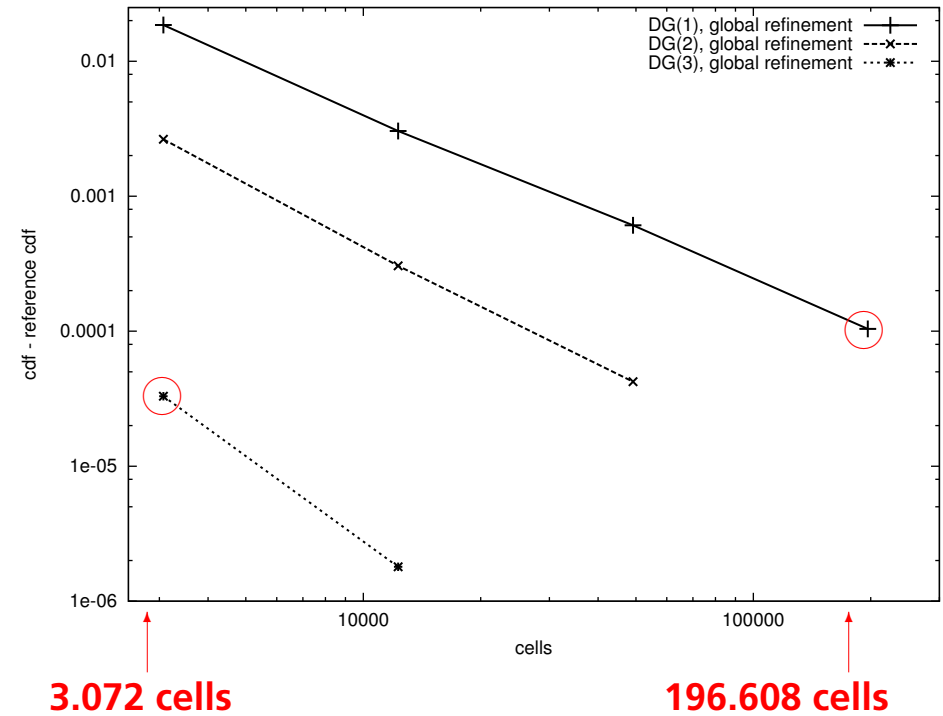


# Konvergenz von cdf

cdf

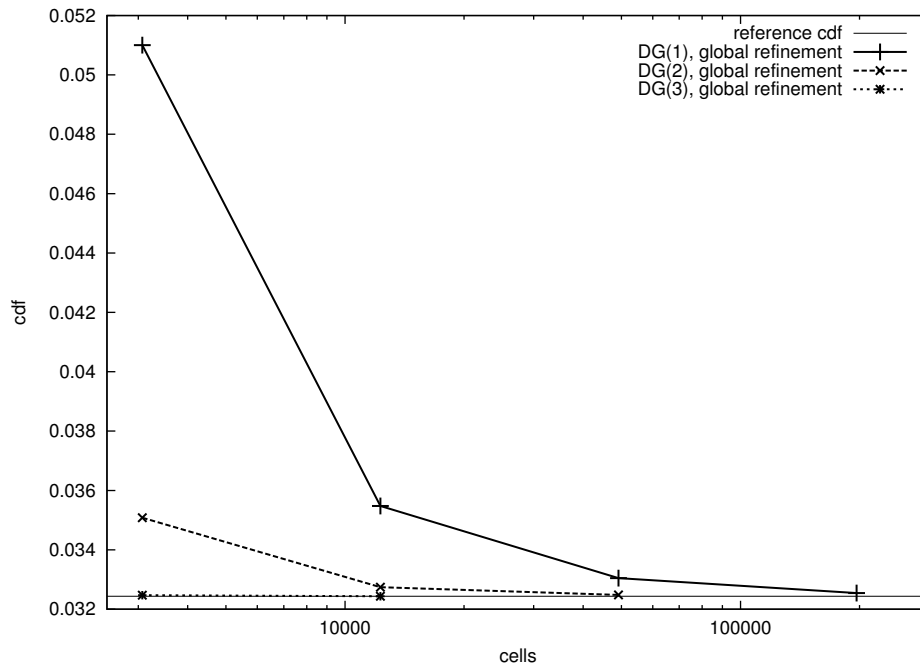


cdf - Referenz cdf

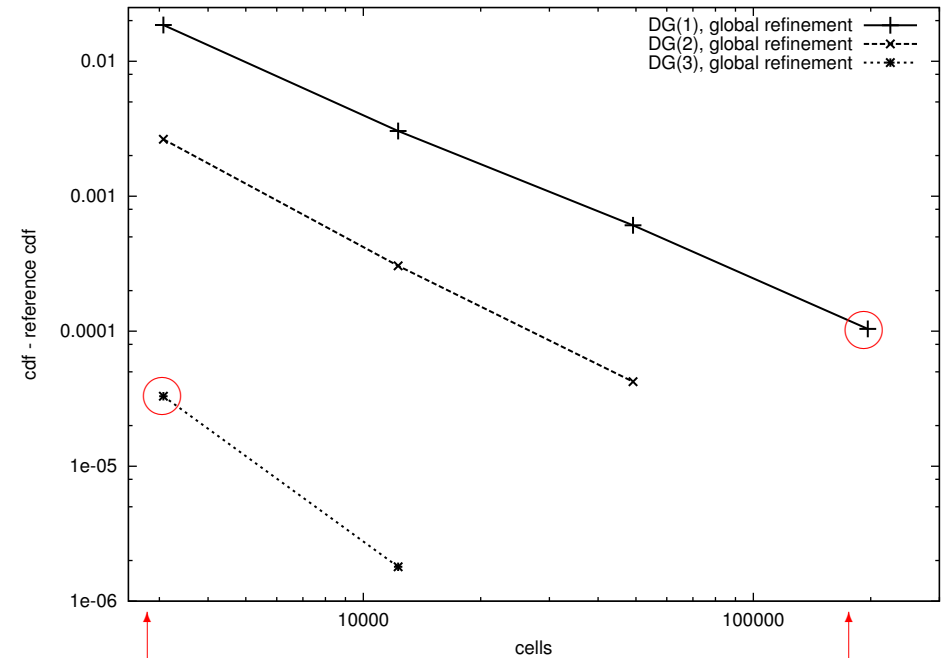


# Konvergenz von cdf

cdf



cdf - Referenz cdf



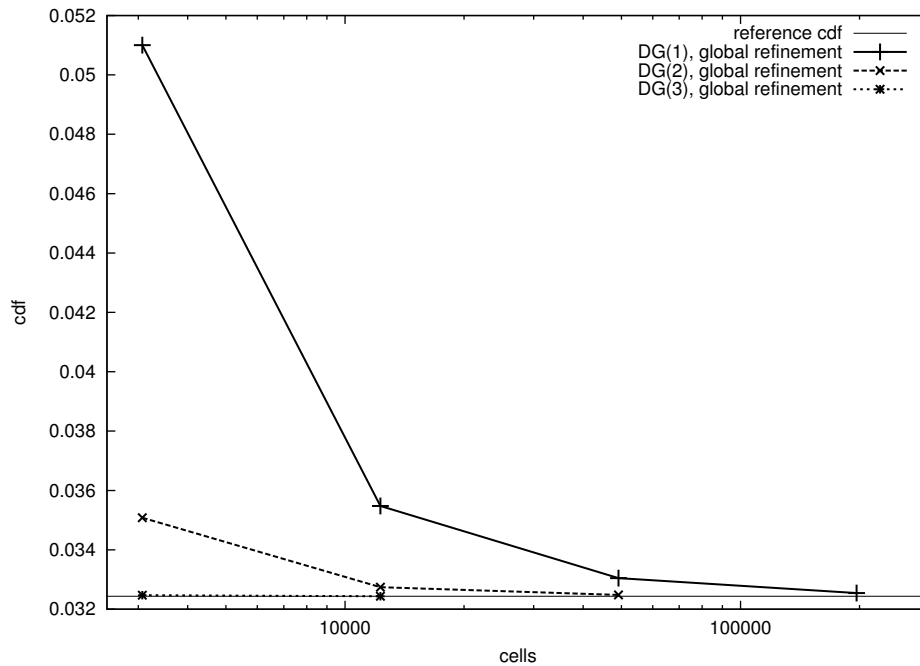
3.072 cells  
196.608 dof

196.608 cells  
3.145.728 dof

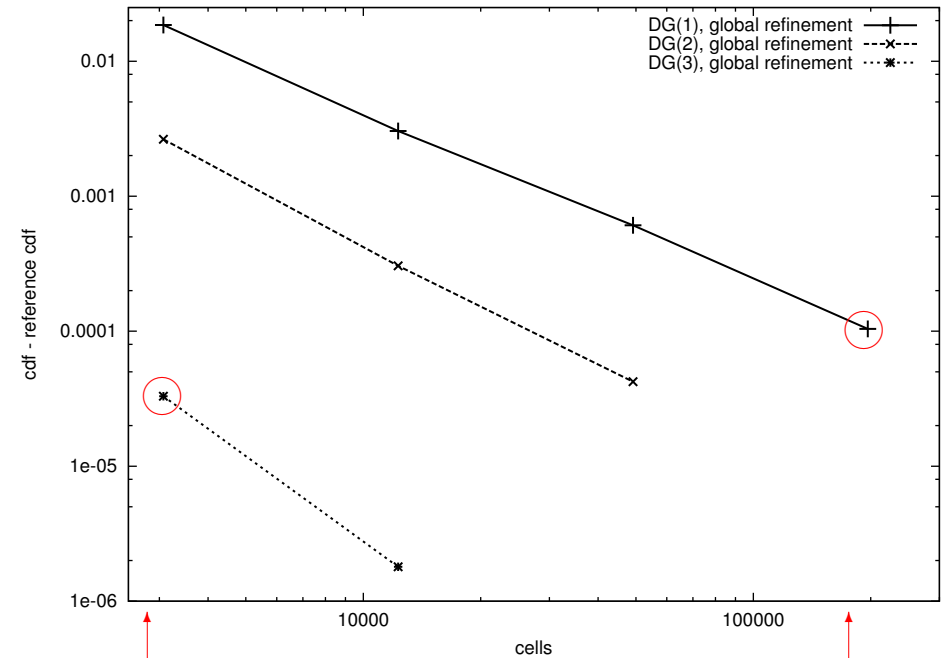


# Konvergenz von cdf

cdf



cdf - Referenz cdf



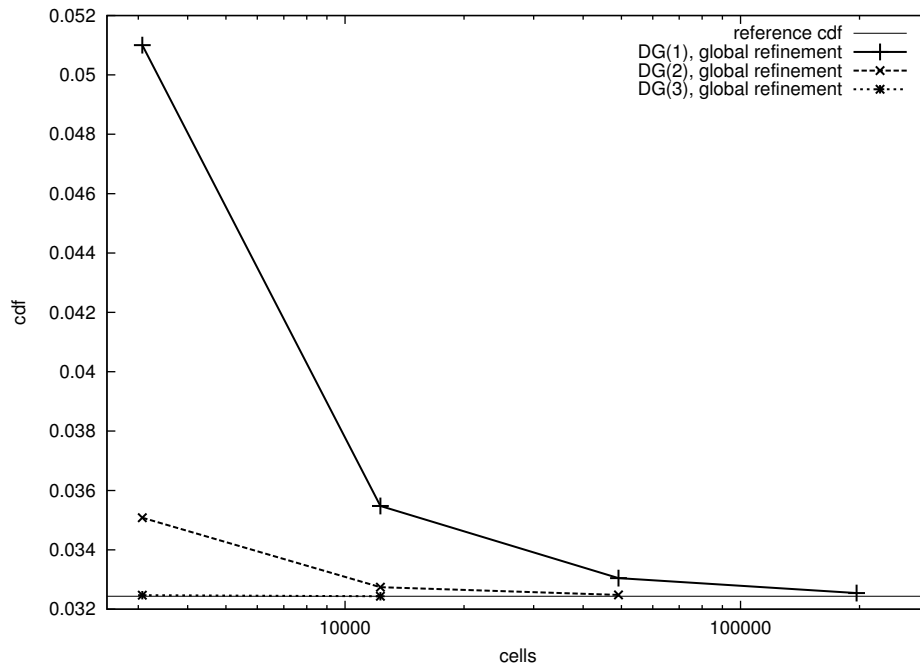
3.072 cells  
196.608 dof  
2 min

196.608 cells  
3.145.728 dof  
34 min

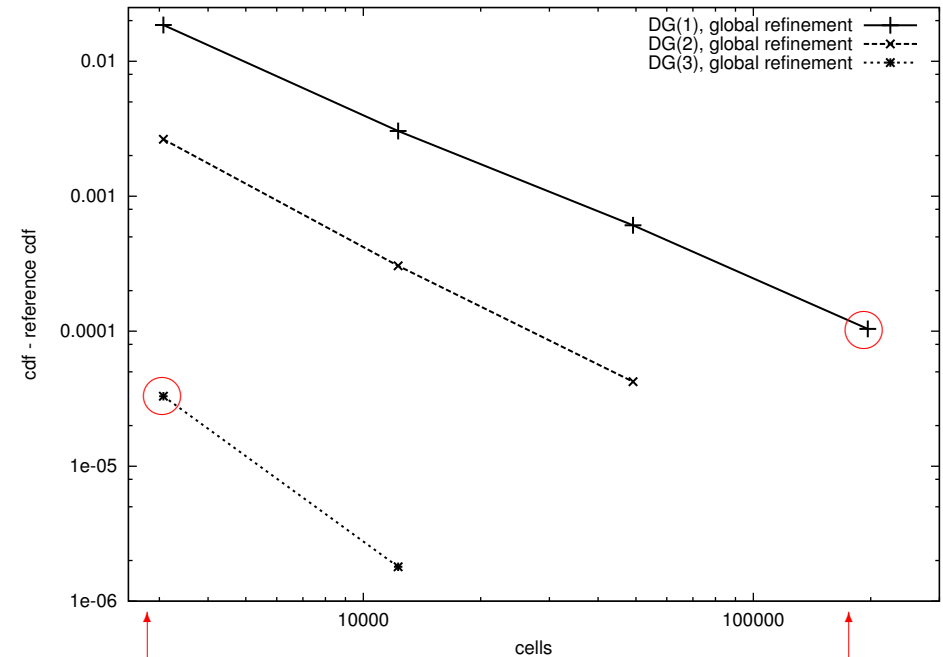


# Konvergenz von cdf

cdf



cdf - Referenz cdf



**3.072 cells**  
**196.608 dof**  
**2 min**

**196.608 cells**  
**3.145.728 dof**  
**34 min**

**786.432 cells**  
**12.582.912 dofs**  
**≈ 3 h (extrapoliert)**



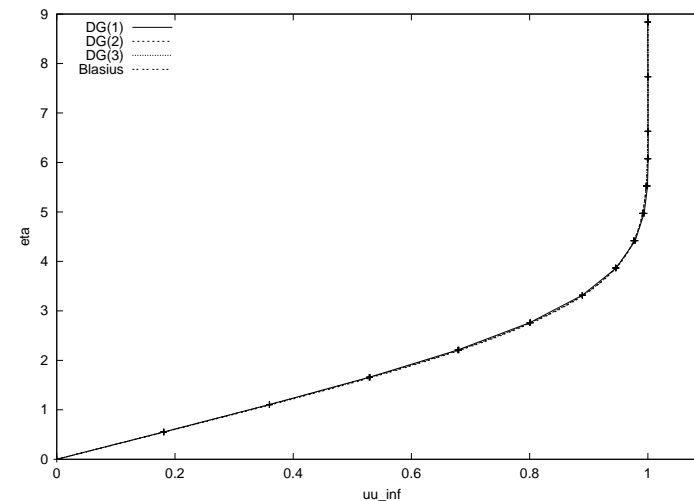
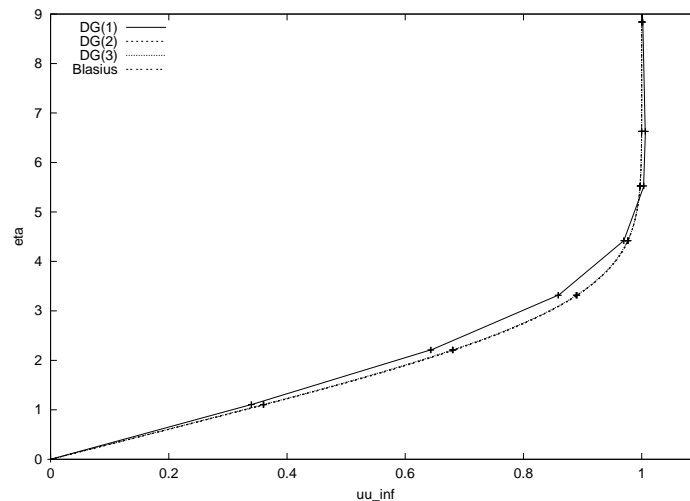
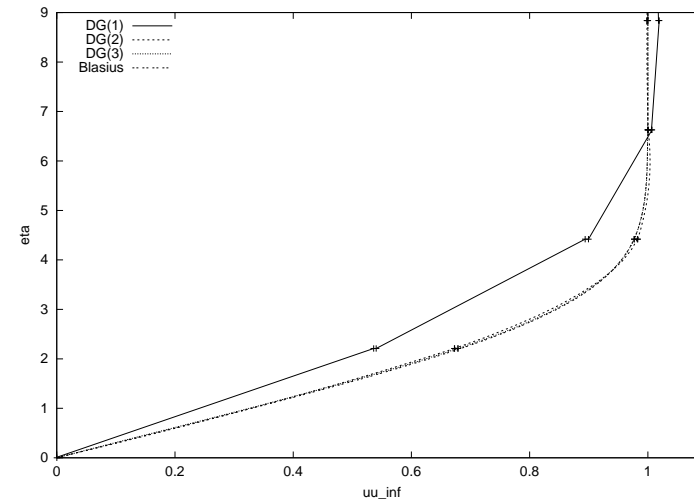
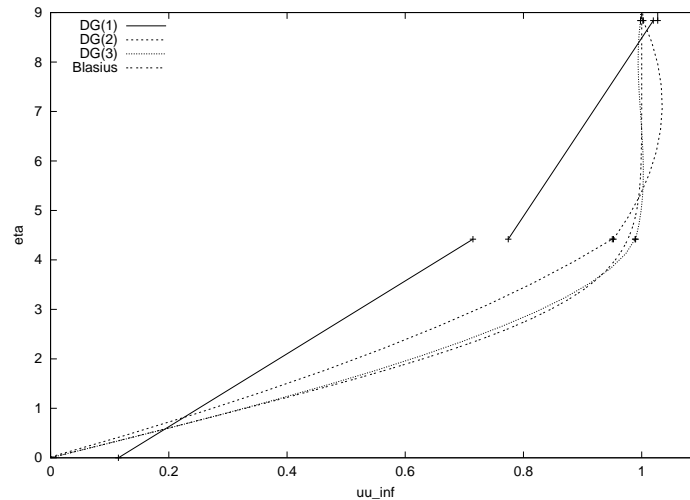


# Approximation höherer Ordnung von viskosen Randschichten



# Approximation höherer Ordnung von viskosen Randschichten

Ebene Platte:  $M = 0.01$ ,  $Re = 10000$ , siehe [Hartmann,Houston2006]







# Higher order approximation of viscous boundary layers

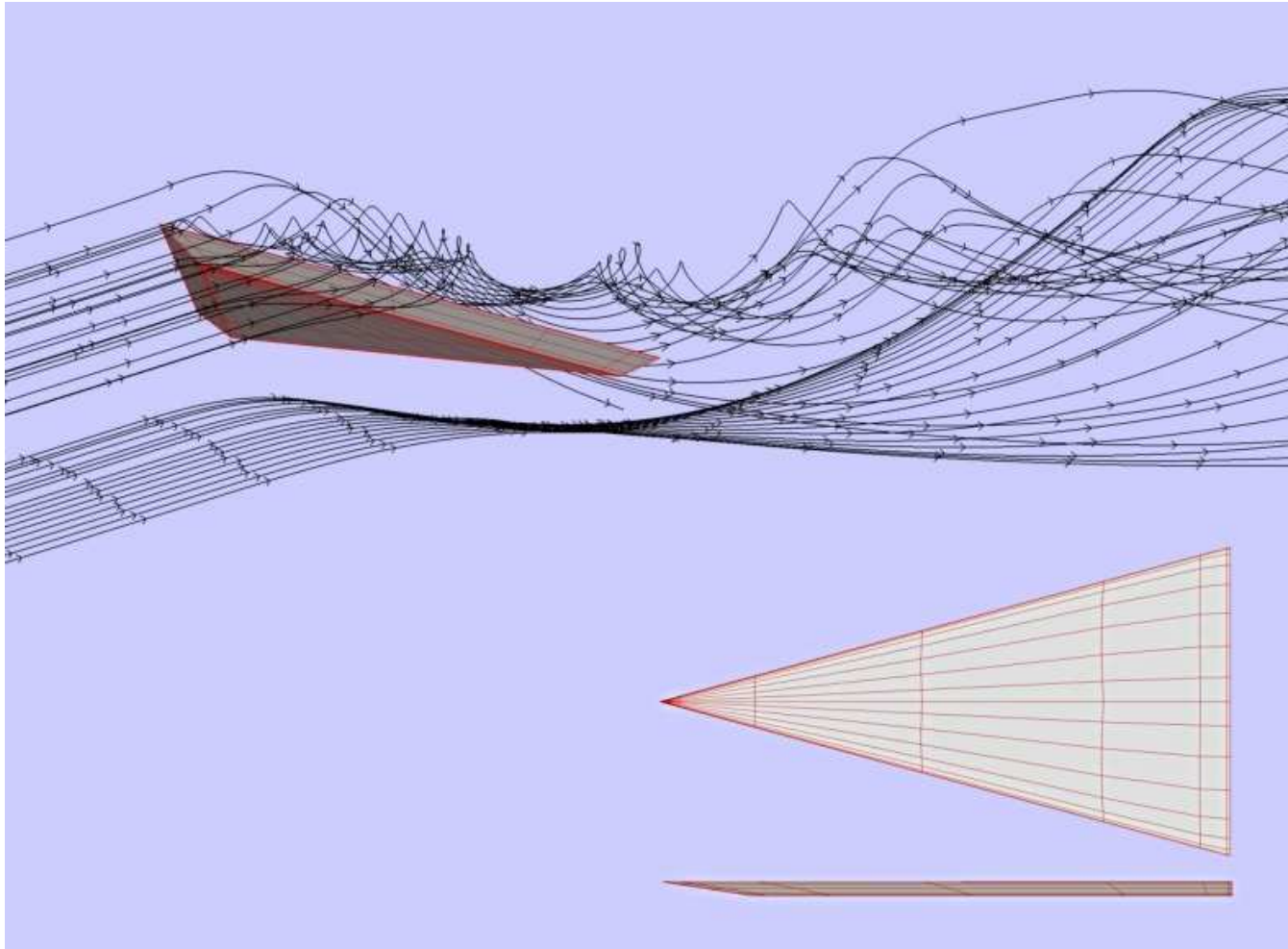
Ebene Platte:  $M = 0.01$ ,  $Re = 10000$

Approximation (auf 5% Genauigkeit) der viskosen Kräfte auf die Wand:

	DG(1)	DG(2)	DG(3)
Zellen	36	5	3
DoFs	72	15	12

orthogonal zur Wand

# Laminarer Deltaflügel

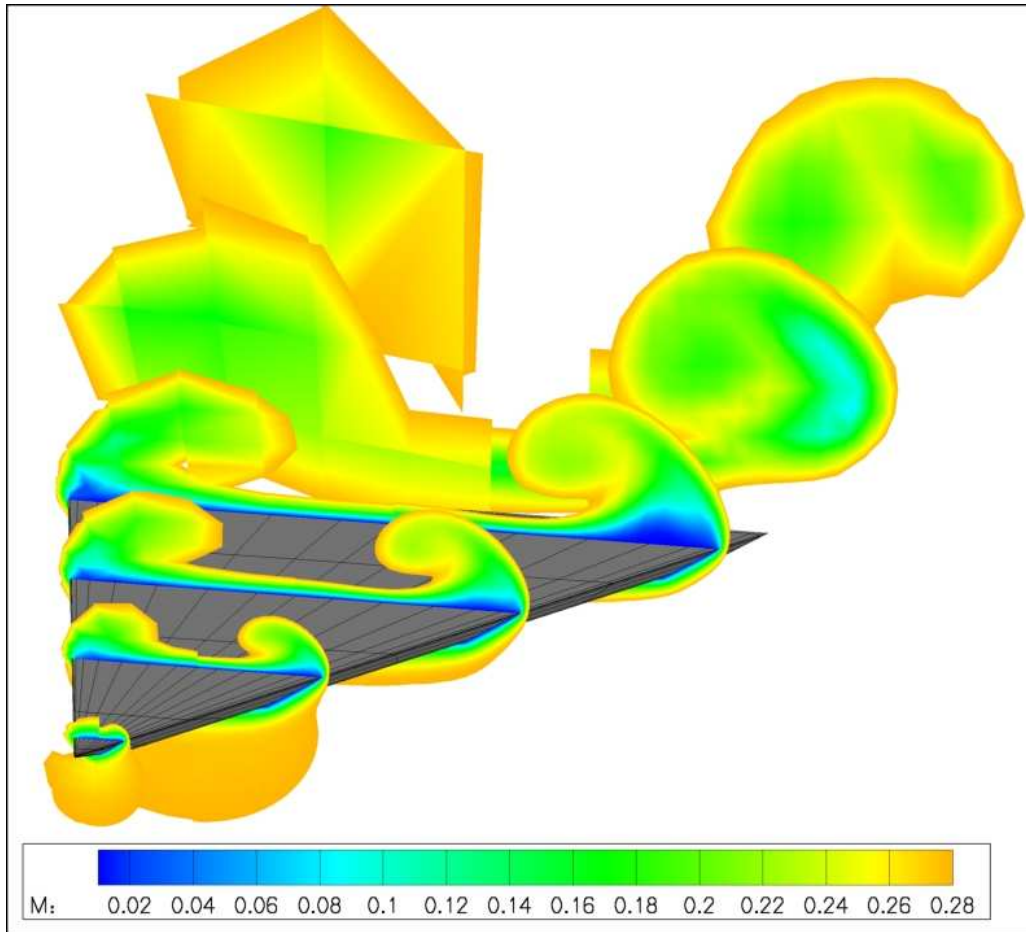


**ADIGMA  
BTC-2  
Testfall**

$$M = 0.3,$$
$$\alpha = 12.5^\circ,$$
$$Re = 4000,$$

**isotherme  
Wand**

# Laminarer Deltaflügel

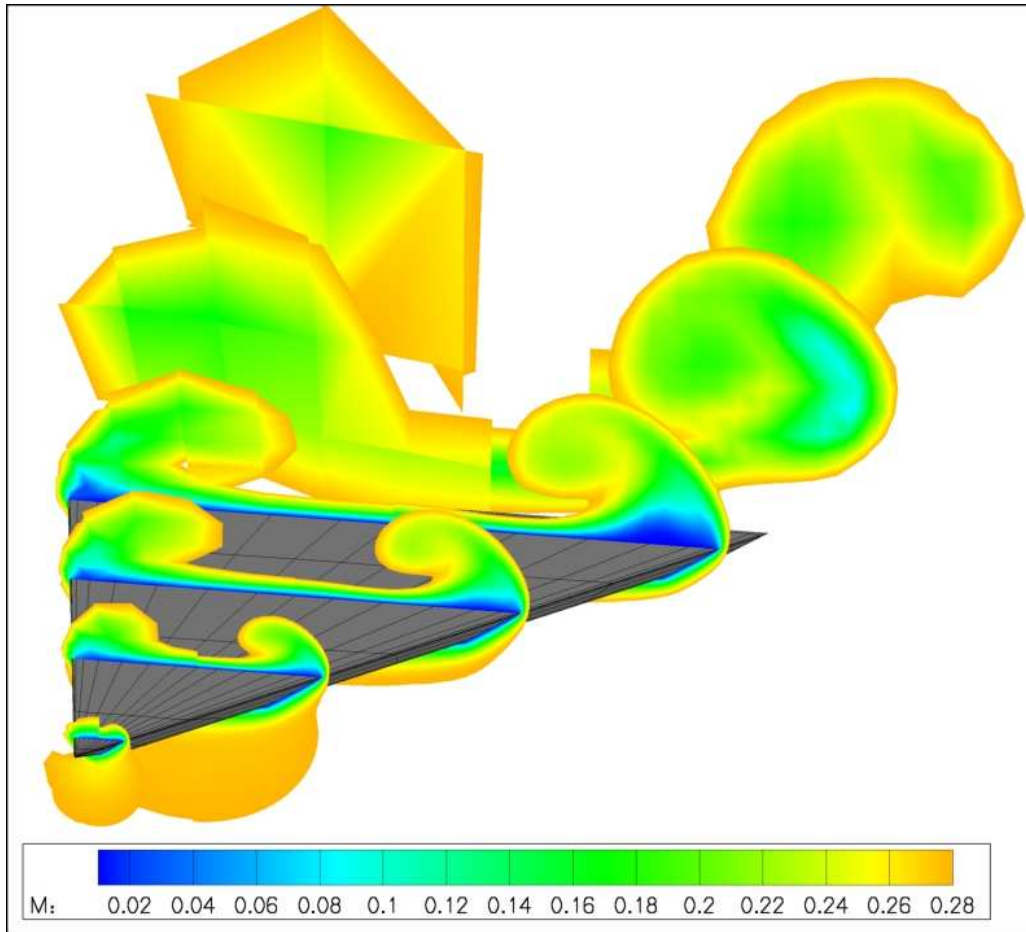


$M = 0.3, \alpha = 12.5^\circ,$   
 $Re = 4000$

**3264 Zellen**  
**für das Halbmodell**

**links: DG(1), 2. Ordnung**  
**rechts: DG(4), 5. Ordnung**

# Laminarer Deltaflügel



$M = 0.3, \alpha = 12.5^\circ,$   
 $Re = 4000$

**3264 Zellen**  
**für das Halbmodell**

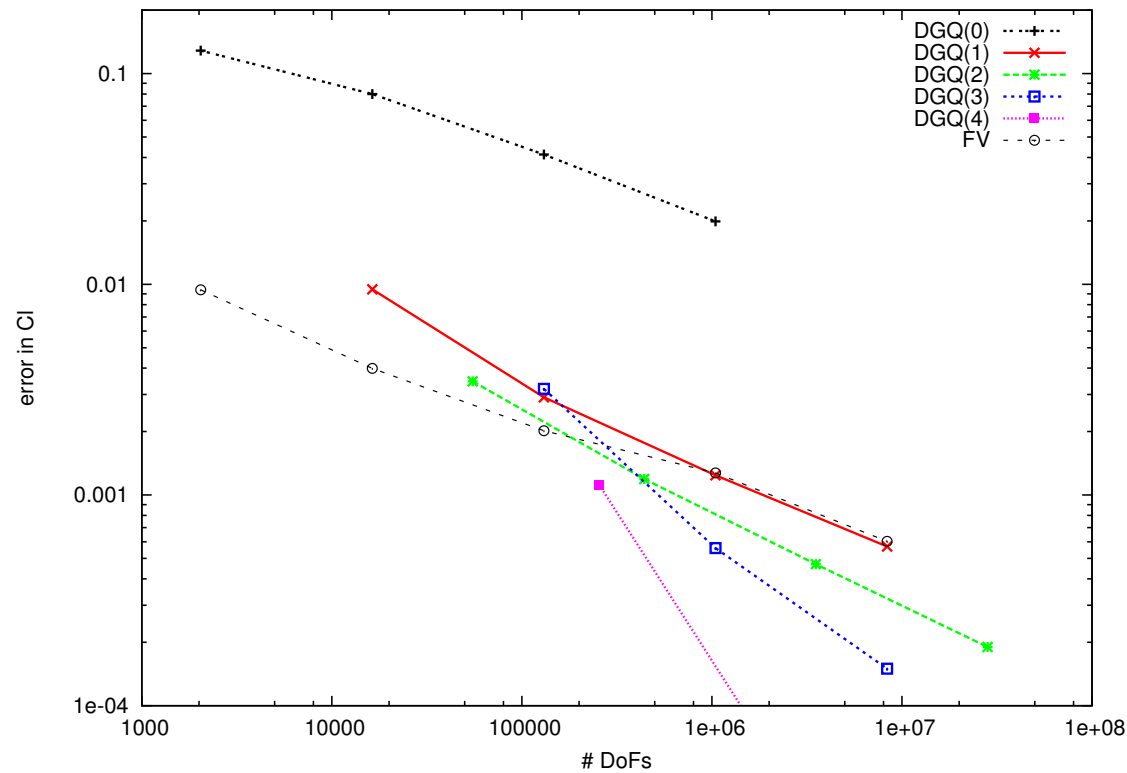
links: DG(1), 2. Ordnung  
rechts: DG(4), 5. Ordnung

**DG(1), 40 DoFs/Zelle:**  
**130,560 DoFs**

**DG(4), 625 dofs/Zelle:**  
**2,040,000 DoFs**

# Laminarer Deltaflügel, $M = 0.3$ , $\alpha = 12.5^\circ$ , $Re = 4000$

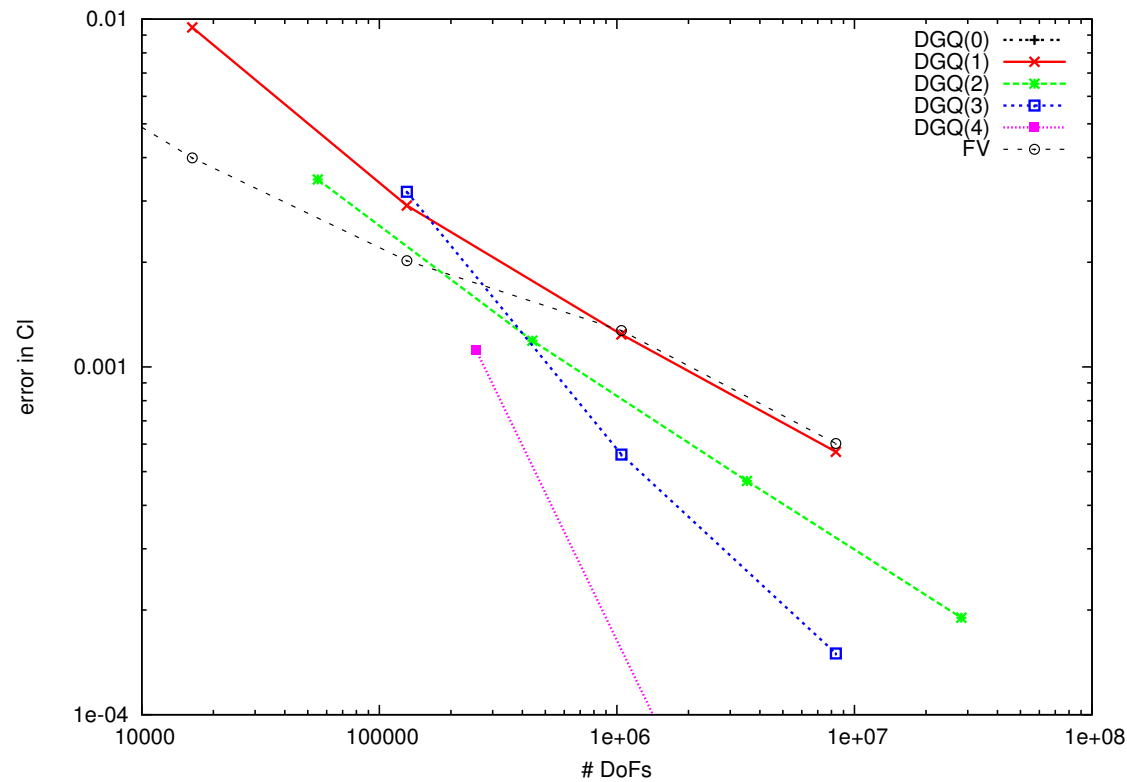
Konvergenz von  $C_L$  auf einer Folge global verfeinerter Gitter





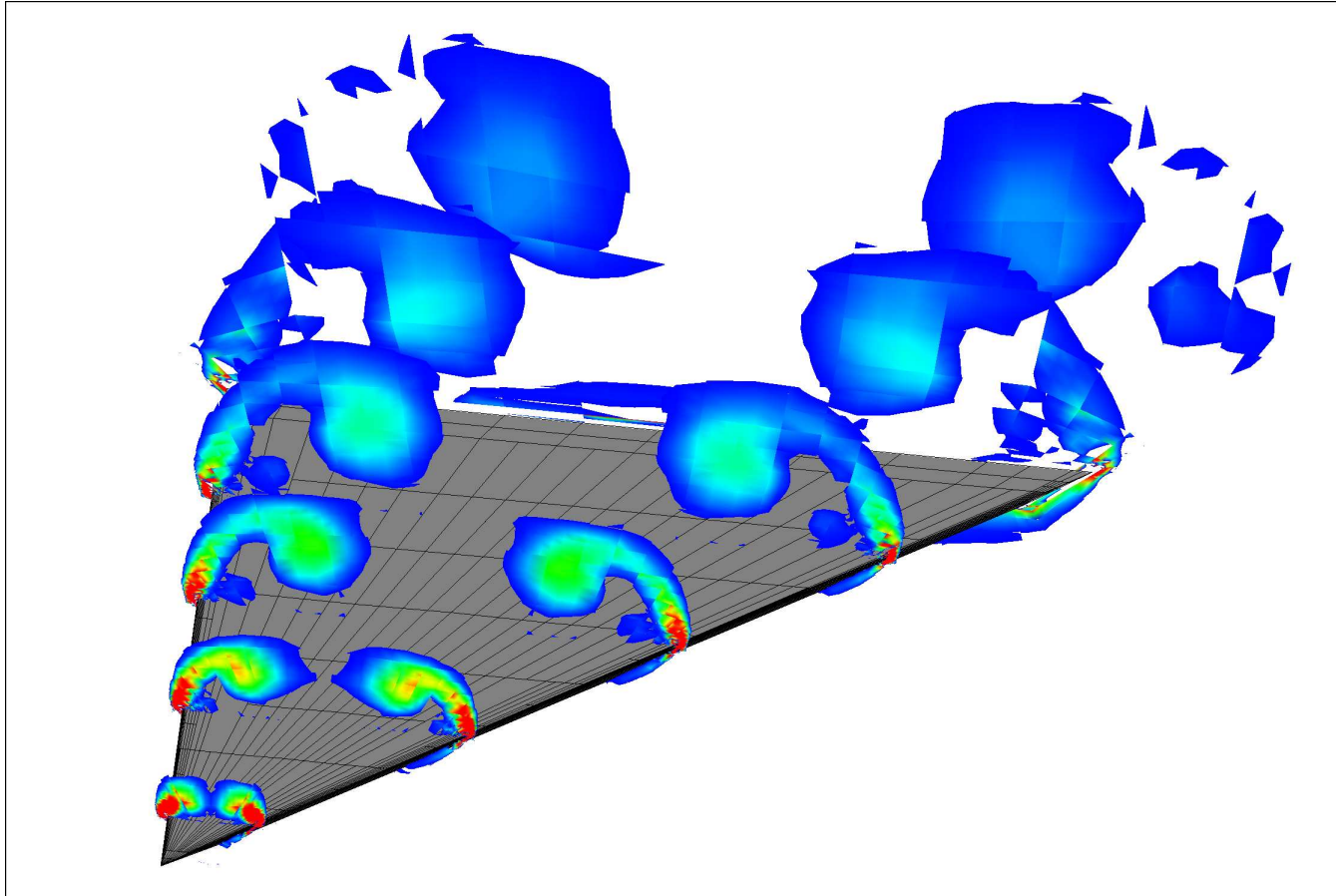
# Laminarer Deltaflügel, $M = 0.3$ , $\alpha = 12.5^\circ$ , $Re = 4000$

Konvergenz von  $C_L$  auf einer Folge global verfeinerter Gitter



# Laminarer Deltaflügel

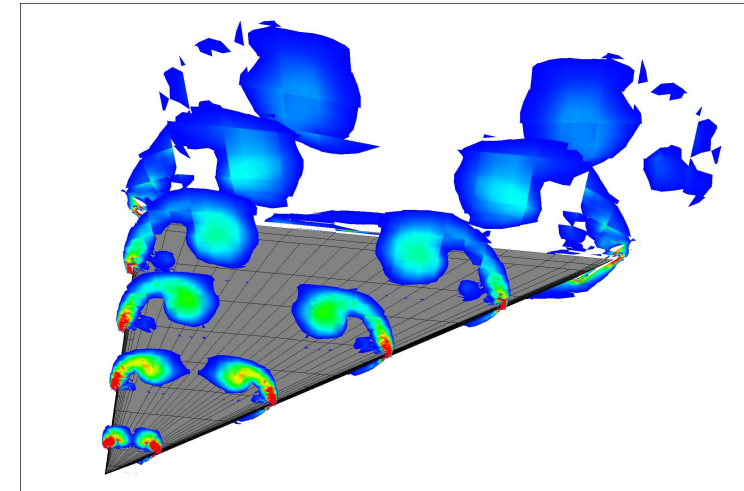
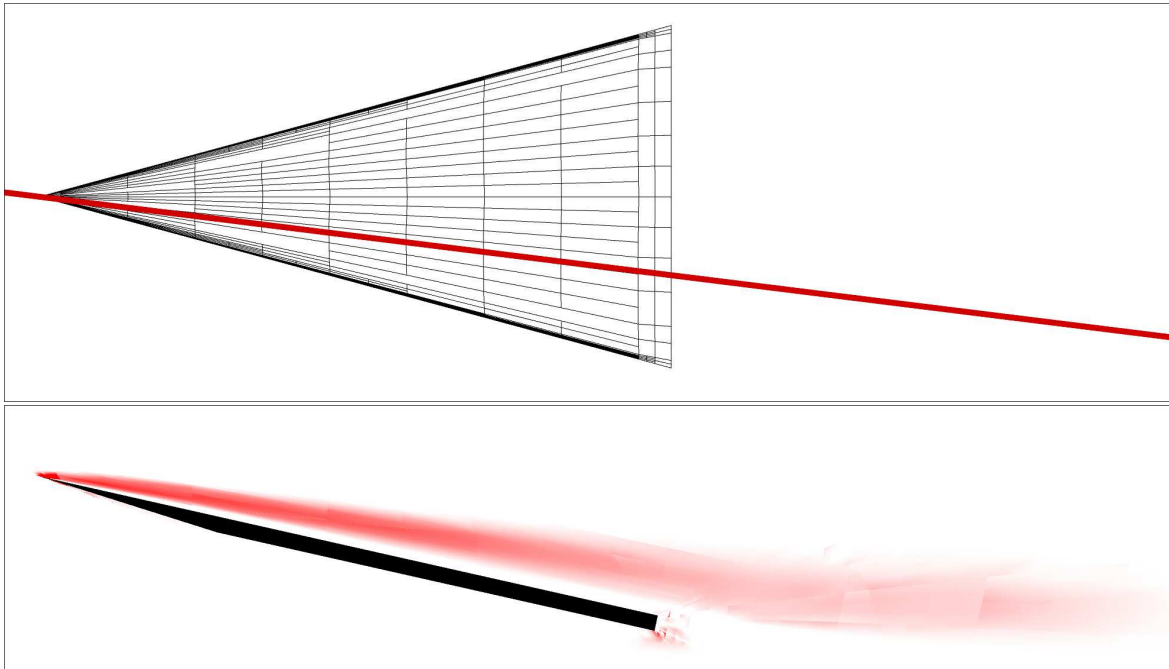
DG(3) Diskretisierung auf lokal verfeinertem Gitter (8.122 Zellen für Halbmodel)





# Laminarer Deltaflügel, $M = 0.3$ , $\alpha = 12.5^\circ$ , $Re = 4000$

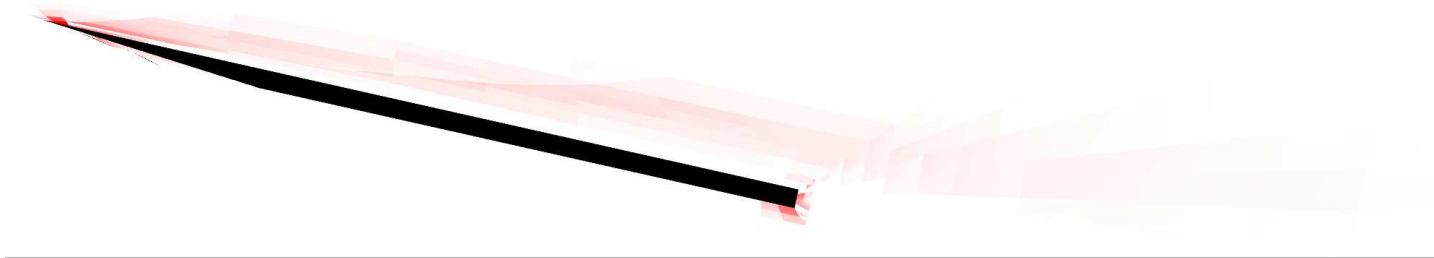
Schnitt entlang einer der Wirbel



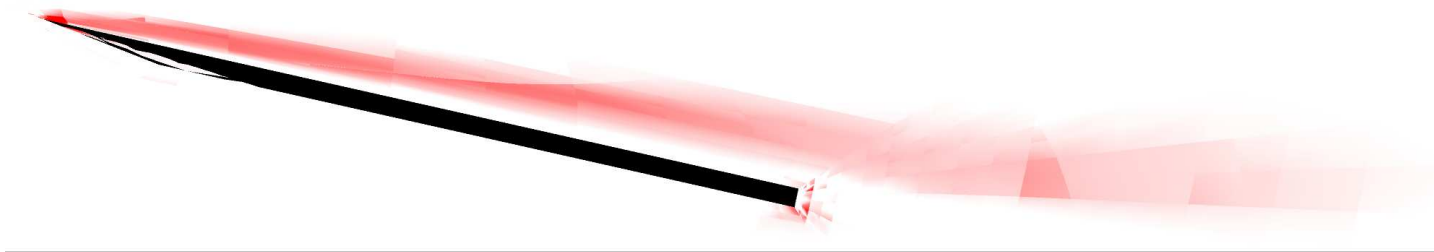
# Laminarer Deltaflügel, $M = 0.3$ , $\alpha = 12.5^\circ$ , $Re = 4000$

DG Diskretisierung auf lokal verfeinertem Gitter (8.122 Zellen für Halbmodell)

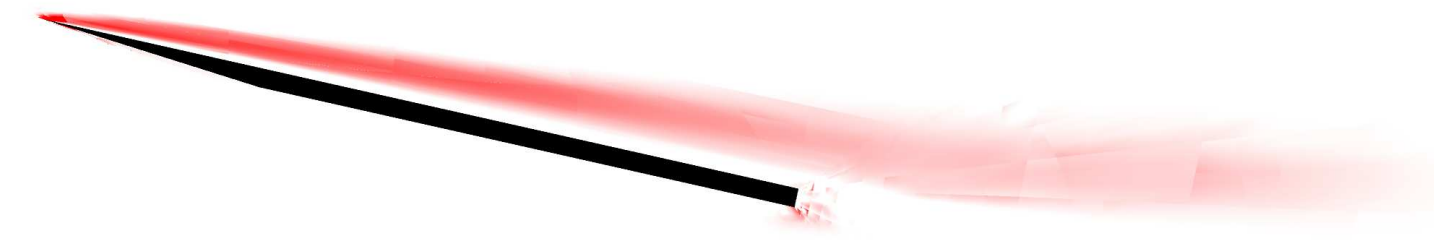
p=1



p=2



p=3





# Fehlerschätzung



**Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e.V.**  
in der Helmholtz-Gemeinschaft



# Fehlerschätzung für einzelne Zielfunktionale

Gegeben die Diskretisierung: Finde  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  sodass

$$\mathcal{N}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (1)$$

und ein Zielfunktional  $J$ .

Berechne:  $J(\mathbf{u}_h)$ , exakt (aber unbekannt):  $J(\mathbf{u})$ , was ist  $J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h)$ ?!

Mit Hilfe eines Dualitätsarguments erhalte eine Fehlerdarstellung

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) &= -\mathcal{N}(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}) = \mathcal{R}(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}) \\ &\approx \mathcal{R}(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{z}}_h) = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \eta_\kappa =: \eta, \end{aligned}$$

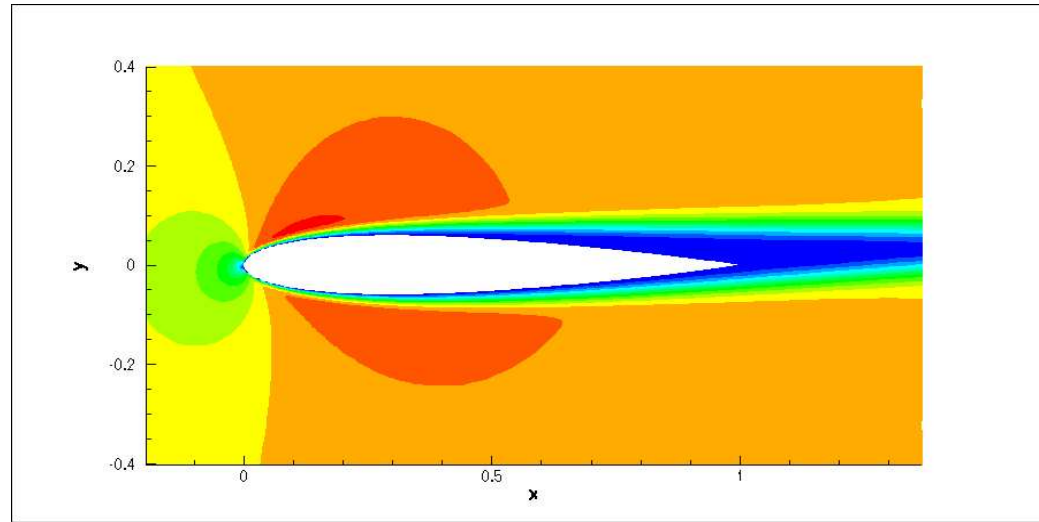
Diskretes adjungiertes Problem: Finde  $\tilde{\mathbf{z}}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h$  sodass

$$\mathcal{N}'[\mathbf{u}_h](\mathbf{w}_h, \tilde{\mathbf{z}}_h) = J'[\mathbf{u}_h](\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h.$$

# Fehlerschätzung für einzelne Zielfunktionale: Beispiele

**ADIGMA MTC-3,  
laminare  
Strömung,**

$M = 0.5, \alpha = 2^\circ,$   
 $Re = 5000$



Mach number isolines

## Kraft Koeffizienten:

**Druckbasierter Widerstandsbeiwert:**  $J(\mathbf{u}) = c_{dp}$

**Viskoser Widerstandsbeiwert:**  $J(\mathbf{u}) = c_{df}$

**Auftriebsbeiwert:**  $J(\mathbf{u}) = c_l$

**Momentenbeiwert:**  $J(\mathbf{u}) = c_m$



# Fehlerschätzung für einzelne Zielfunktionale: $J(\mathbf{u}) = c_{dp}$

Beispiel: MTC-3, laminare Strömung,  $M = 0.5$ ,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $Re = 5000$

Zielfunktional:  $J(\mathbf{u}) = c_{dp}$  (druckbasierter Widerstandsbeiwert),

Ref.wert:  $J_{c_{dp}}^{ref}(\mathbf{u}) = 0.02380$

Zellen	DoFs	error in $c_{dp}$		
		exakt	geschätzt	ratio
400	6400	1.034e-03	-1.404e-03	-1.36
652	10432	3.341e-03	2.959e-03	0.89
1090	17440	4.045e-04	5.712e-04	1.41
1801	28816	-2.079e-04	-1.091e-04	0.52
3034	48544	-2.344e-04	-1.890e-04	0.81
5047	80752	-1.529e-04	-1.387e-04	0.91
8527	136432	-8.055e-05	-7.536e-05	0.94
14410	230560	-4.357e-05	-3.762e-05	0.86
24406	390496	-2.366e-05	-2.314e-05	0.98

# Fehlerschätzung für einzelne Zielfunktionale: $J(u) = c_{df}$

Beispiel: MTC-3, laminare Strömung,  $M = 0.5$ ,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $Re = 5000$

Zielfunktional:  $J(u) = c_{df}$  (viskoser Widerstandsbeiwert),

Ref.wert:  $J_{cdf}^{ref}(u) = 0.0322835$

error in $c_{df}$				
Zellen	DoFs	exakt	geschätzt	ratio
400	6400	1.076e-02	1.525e-02	1.42
655	10480	-2.973e-03	-2.592e-03	0.87
1093	17488	-1.415e-03	-1.418e-03	1.00
1804	28864	-3.947e-04	-4.326e-04	1.10
2989	47824	-9.136e-05	-1.116e-04	1.22
5110	81760	-3.787e-05	-4.518e-05	1.19
8476	135616	-1.919e-05	-2.071e-05	1.08
14185	226960	-1.319e-05	-1.619e-05	1.23
23638	378208	-1.048e-05	-1.052e-05	1.00



# Fehlerschätzung für einzelne Zielfunktionale: $J(u) = c_l$

Beispiel: MTC-3, laminare Strömung,  $M = 0.5$ ,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $Re = 5000$

Zielfunktional:  $J(u) = c_l$  (Auftriebsbeiwert),

Ref.wert:  $J_{cl}^{ref}(u) = 0.037286$

error in $c_l$				
Zellen	DoFs	exakt	geschätzt	ratio
400	6400	-1.175e-01	-5.867e-02	0.50
658	10528	6.548e-03	6.841e-03	1.04
1108	17728	-1.292e-03	-1.159e-03	0.90
1861	29776	-1.784e-03	-1.891e-03	1.06
3118	49888	-1.239e-03	-1.266e-03	1.02
5236	83776	-6.504e-04	-6.704e-04	1.03
8746	139936	-2.623e-04	-2.622e-04	1.00





# Fehlerschätzung für einzelne Zielfunktionale: $J(\mathbf{u}) = c_m$

Beispiel: MTC-3, laminare Strömung,  $M = 0.5$ ,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $Re = 5000$

Zielfunktional:  $J(\mathbf{u}) = c_m$  (Momentenbeiwert),

Ref.wert:  $J_{cm}^{ref}(\mathbf{u}) = -0.01661$

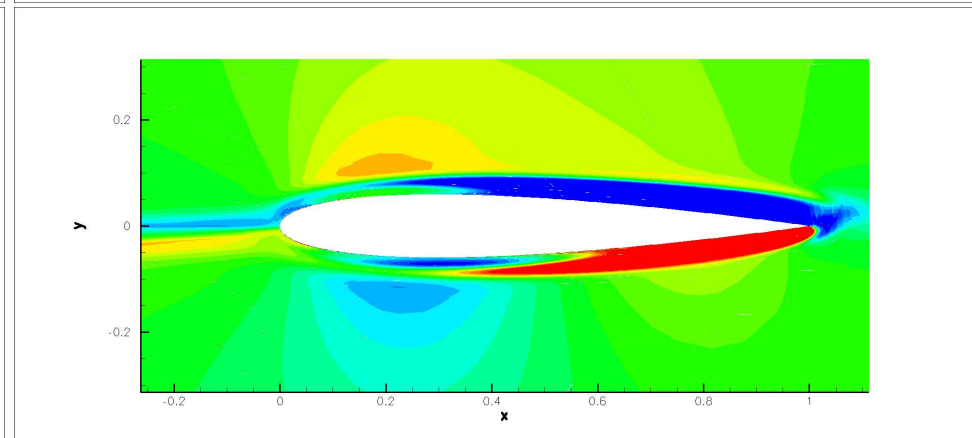
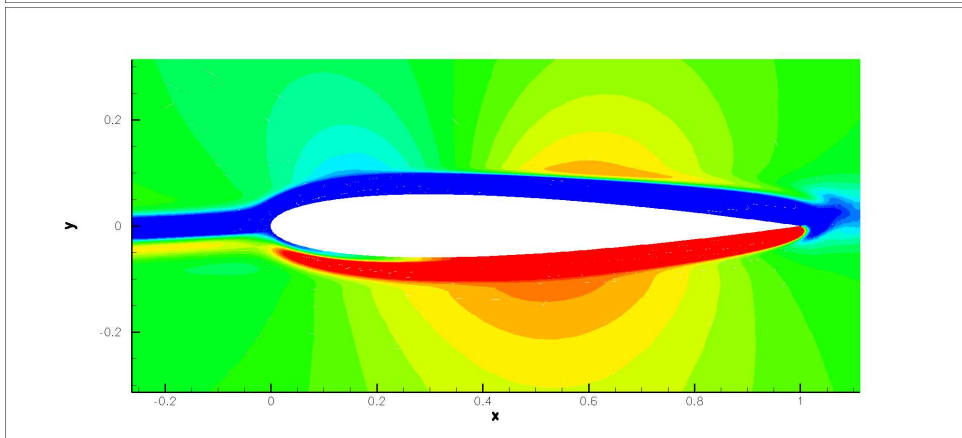
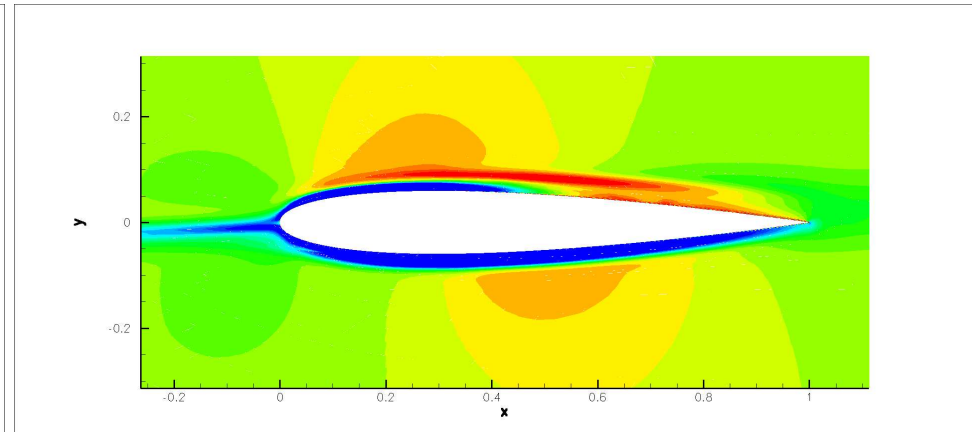
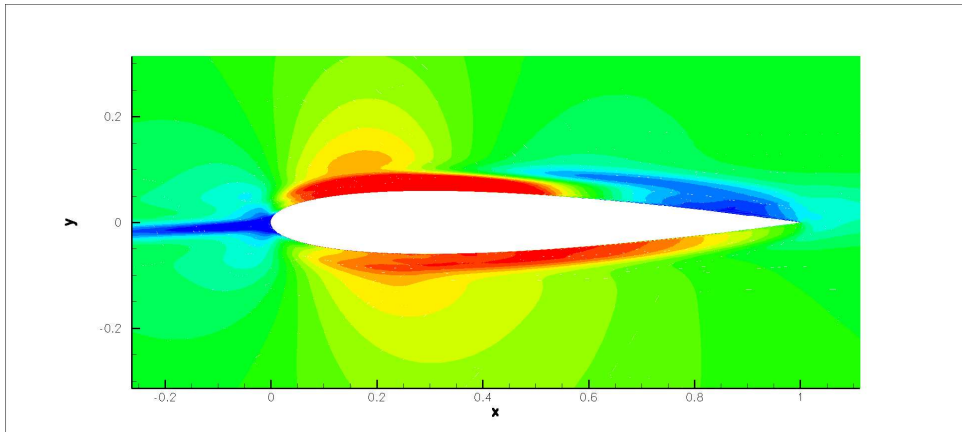
		error in $c_m$		
Zellen	DoFs	exakt	geschätzt	ratio
400	6400	-1.221e-03	-3.035e-03	2.49
667	10672	2.883e-03	3.001e-03	1.04
1138	18208	3.862e-04	4.378e-04	1.13
1867	29872	9.083e-05	8.543e-05	0.94
3130	50080	6.199e-05	5.807e-05	0.94

# Fehlerschätzung für einzelne Zielfunktionale

$z_1$  Komponente der adjungierten Lösungen.

Oben: cdp, cdf;

Unten: cl, cm.



# Fehlerschätzung für mehrere Zielfunktionale

Gegeben  $N$  Zielfunktionale  $J_i(\mathbf{u}), i = 1, \dots, N$ .

Der *direkte Weg* braucht  $N$  diskrete adjungierte Probleme: finde  $\tilde{\mathbf{z}}_{i,h} \in \tilde{\mathbf{V}}_h$  sodass

$$\mathcal{N}'[\mathbf{u}_h](\mathbf{w}_h, \tilde{\mathbf{z}}_{i,h}) = J'_i[\mathbf{u}_h](\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h, \quad i = 1, \dots, N,$$

um Fehlerschätzungen für die  $N$  Zielfunktionale zu erhalten:

$$J_i(\mathbf{u}) - J_i(\mathbf{u}_h) = \mathcal{R}(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_i) \approx \mathcal{R}(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_{i,h}), \quad i = 1, \dots, N,$$

Das *neue Verfahren*, ursprünglich in [Hartmann,Houston2003] für Burgers Gln., braucht *ein* diskretes adjungiert-adjungiertes Problem (Fehlergleichung): Finde  $\tilde{\mathbf{e}}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h$  sodass

$$\mathcal{N}'[\mathbf{u}_h](\tilde{\mathbf{e}}_h, \mathbf{w}_h) = \mathcal{R}(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h,$$

um Fehlerschätzungen für die  $N$  Zielfunktionale zu erhalten:

$$J_i(\mathbf{u}) - J_i(\mathbf{u}_h) \approx J'_i[\mathbf{u}_h](\mathbf{e}) \approx J'_i[\mathbf{u}_h](\tilde{\mathbf{e}}_h), \quad i = 1, \dots, N,$$

# Fehlerschätzung für mehrere Zielfunktionale

Beispiel: MTC-3, laminare Strömung,  $M = 0.5$ ,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $Re = 5000$

Auf jedem Gitter berechne Strömungslösung  $u_h$  und die Adjungiert-adjungierte  $\tilde{e}_h$ .

exakter Fehler:  $J_i^{\text{ref}}(u) - J_i(u_h), \quad i = 1, \dots, N,$

Fehlerschätzung:  $J'_i[u_h](\tilde{e}_h), \quad i = 1, \dots, N,$

Zellen	Fehler in cdp		Fehler in cdf		Fehler in cl		Fehler in cm	
	exakt	geschätzt	exakt	geschätzt	exakt	geschätzt	exakt	geschätzt
400	1.03e-03	-2.92e-03	1.08e-02	1.62e-02	-1.18e-01	-6.59e-02	-1.22e-03	-4.36e-03
655	1.39e-03	1.38e-03	-3.02e-03	-2.89e-03	6.30e-03	4.15e-03	2.99e-03	2.67e-03
1111	-1.04e-04	8.65e-05	-1.42e-03	-1.89e-03	-8.30e-04	-6.54e-04	4.76e-04	5.11e-04
1843	-6.28e-04	-5.28e-04	-5.20e-04	-6.46e-04	-1.83e-03	-1.91e-03	6.25e-05	3.49e-05
3061	-3.96e-04	-3.51e-04	-1.61e-04	-2.25e-04	-7.34e-04	-7.69e-04	3.15e-05	3.67e-05
5146	-1.82e-04	-1.63e-04	-9.03e-05	-1.11e-04	-4.86e-04	-3.94e-04	1.09e-05	1.35e-05

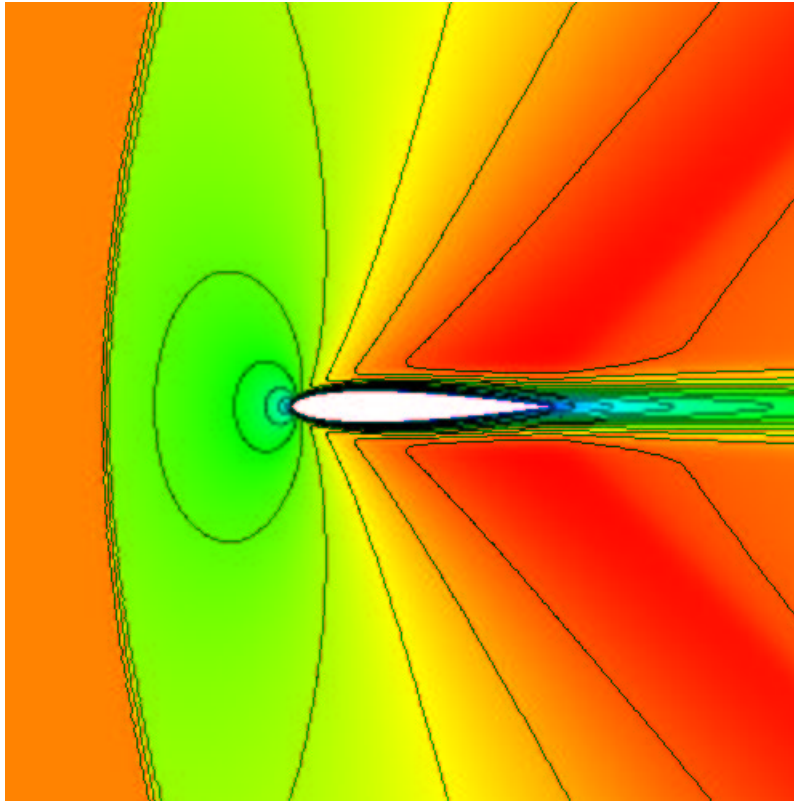


# Ziel-orientierte (adjungiert-basierte) Verfeinerung

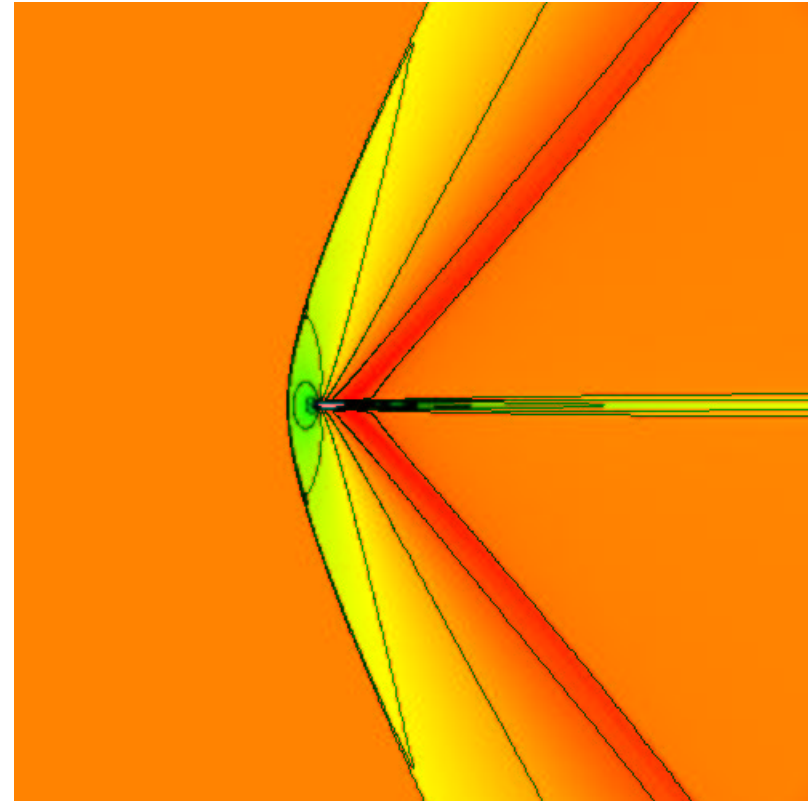


# Ziel-orientierte Verfeinerung

Viskose Strömung,  $M = 1.2$ ,  $Re = 1000$ ,  $\alpha = 0$ , um das NACA0012 Profil



Mach Isolinien: nah

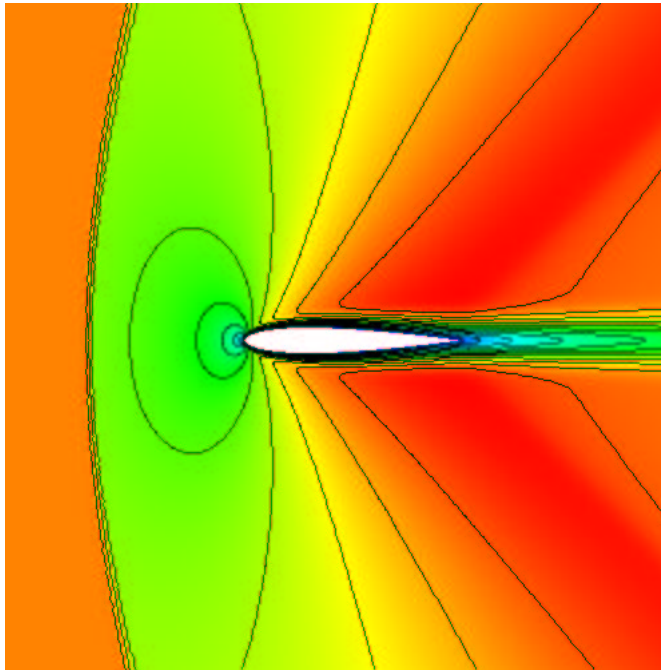


Mach Isolinien: fern

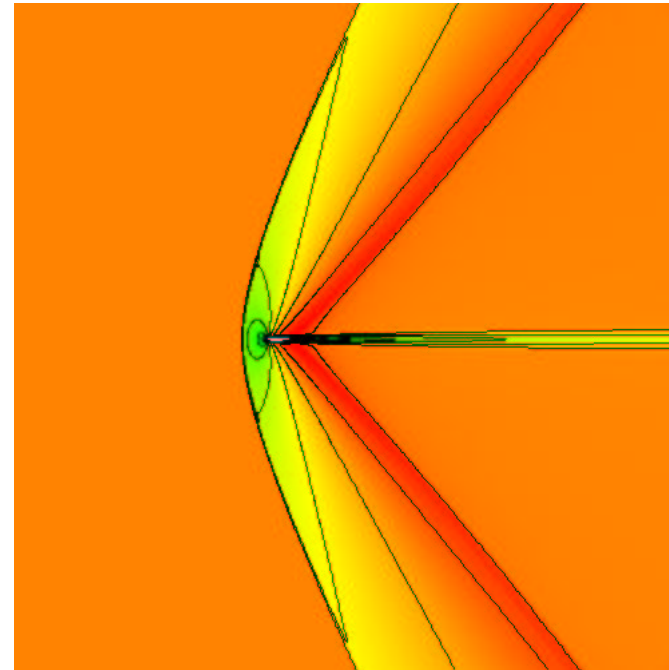


# Goal-oriented refinement

Viskose Strömung,  $M = 1.2$ ,  $Re = 1000$ ,  $\alpha = 0$ , um das NACA0012 Profil



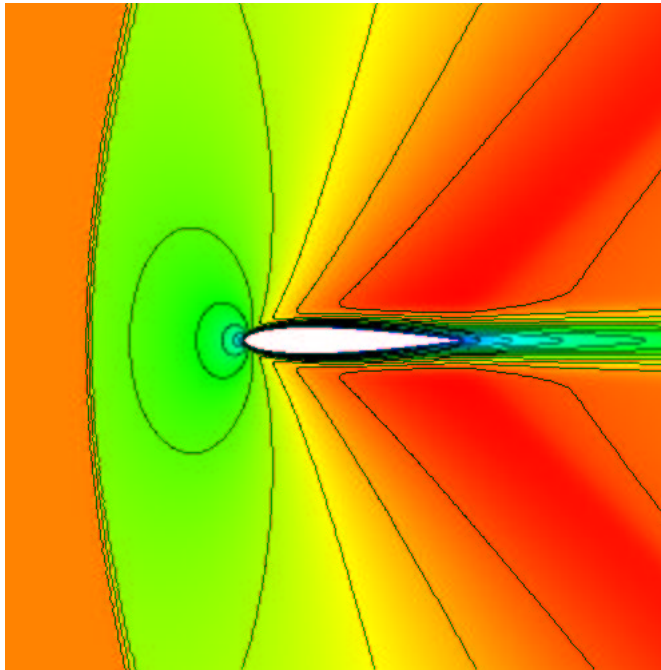
Mach Isolinien: nah



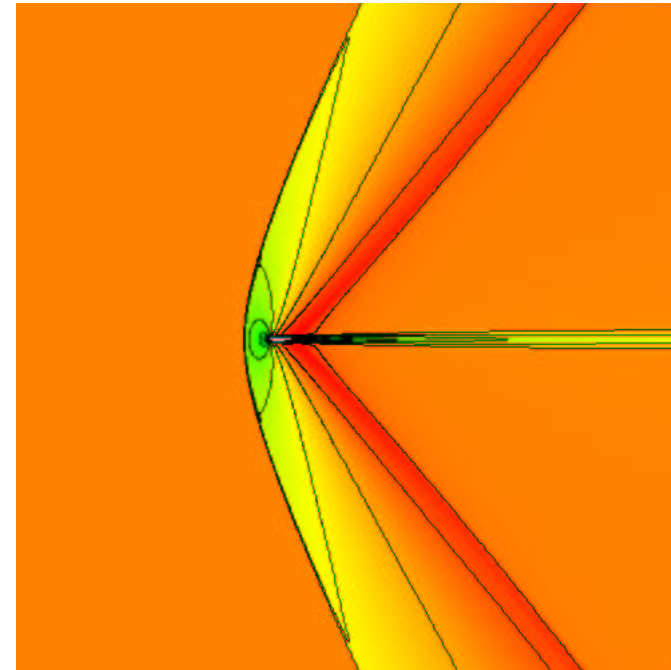
Mach Isolinien: fern

# Goal-oriented refinement

Viskose Strömung,  $M = 1.2$ ,  $Re = 1000$ ,  $\alpha = 0$ , um das NACA0012 Profil



Mach Isolinen: nah



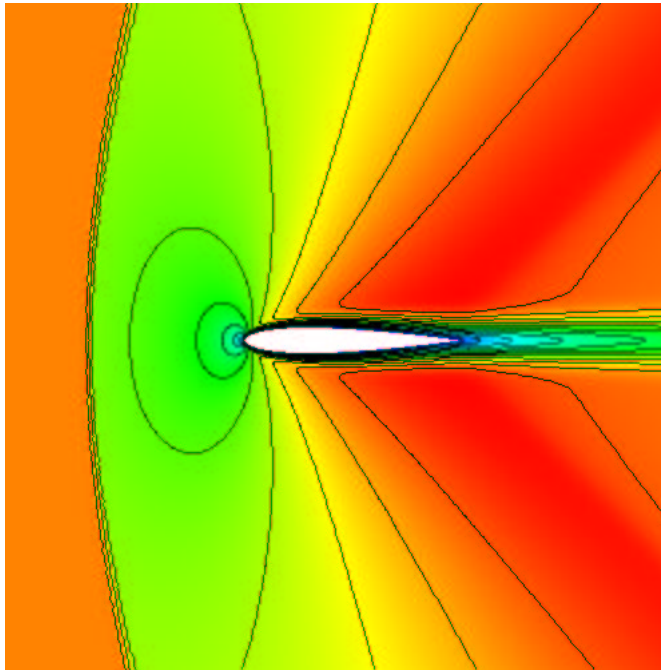
Mach Isolinen: fern

Zur effizienten und genauen Berechnung von  $J(\mathbf{u}) = c_{dp}$ :

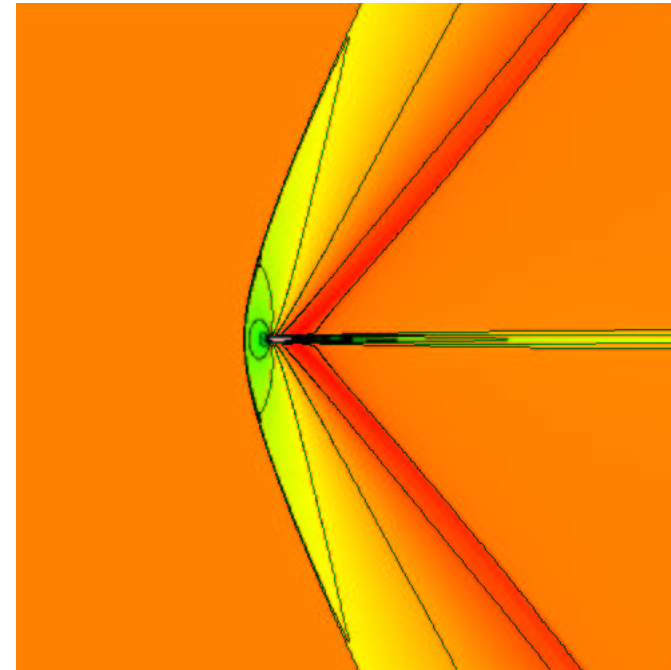


# Goal-oriented refinement

Viskose Strömung,  $M = 1.2$ ,  $Re = 1000$ ,  $\alpha = 0$ , um das NACA0012 Profil



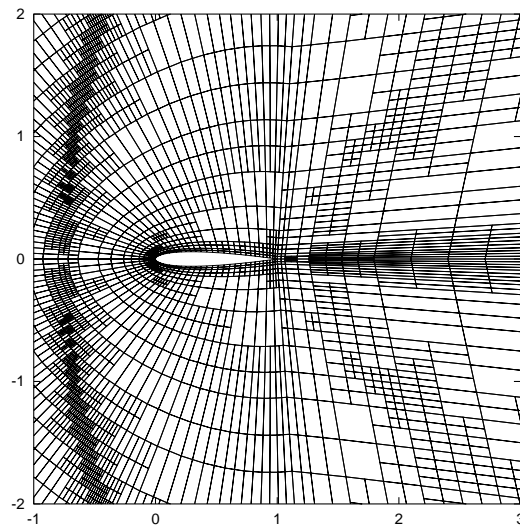
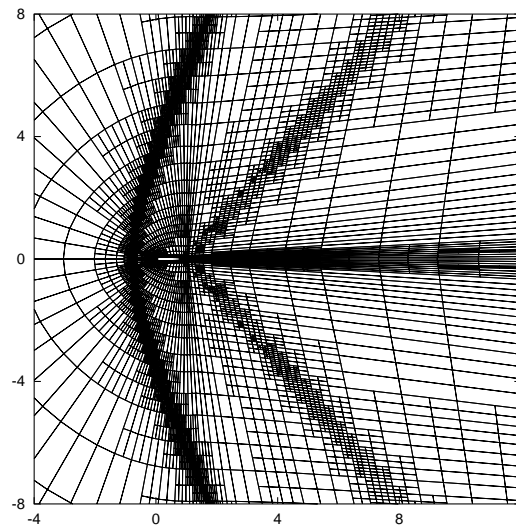
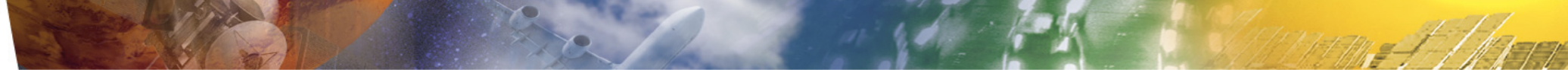
Mach Isolinen: nah

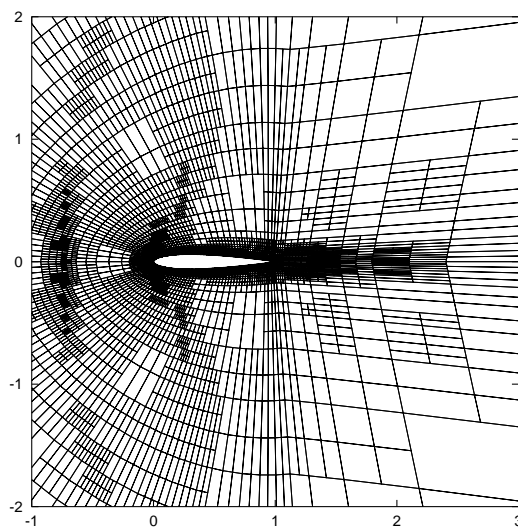
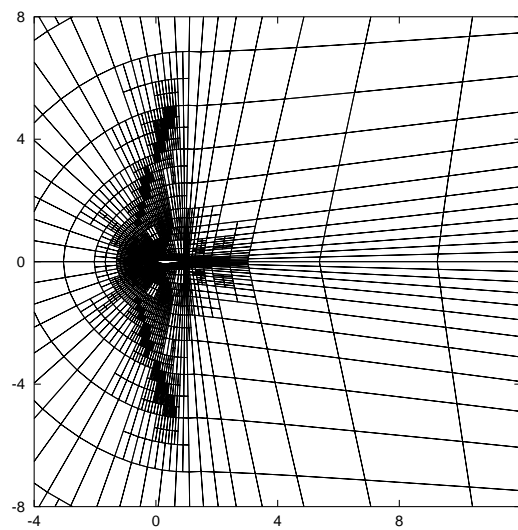
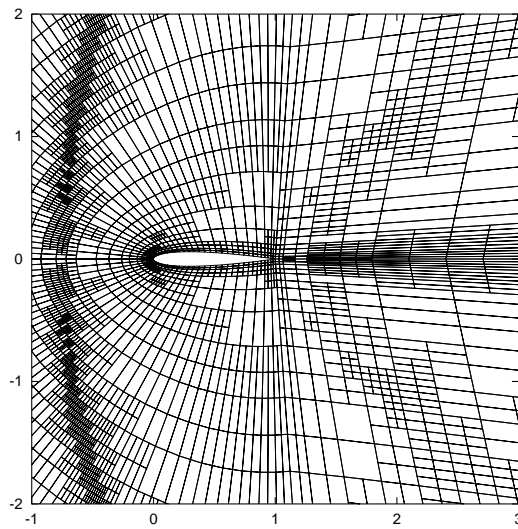
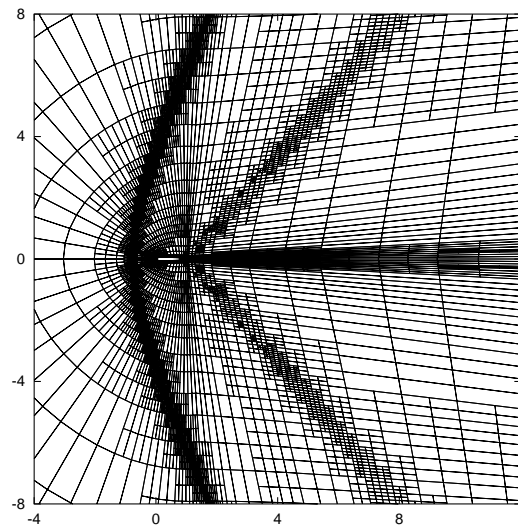


Mach Isolinen: fern

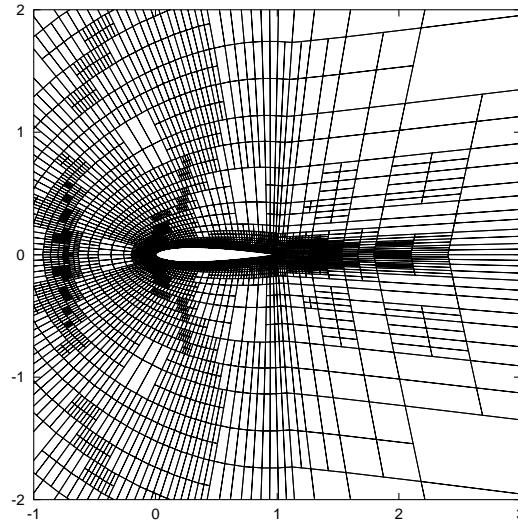
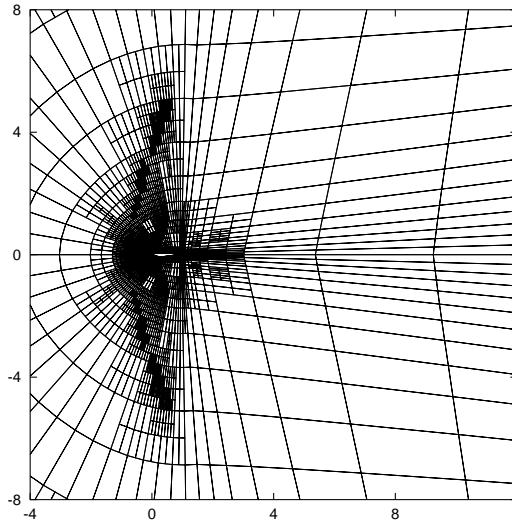
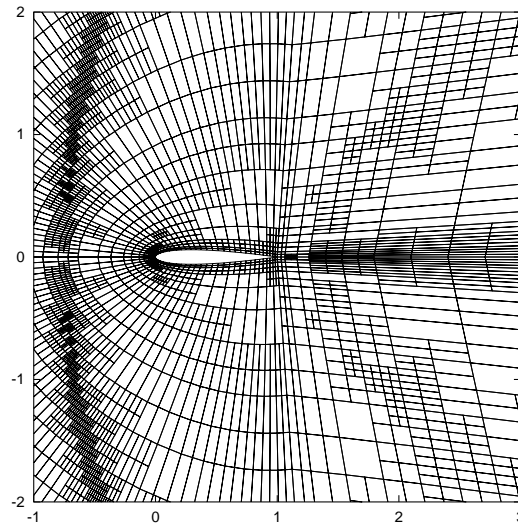
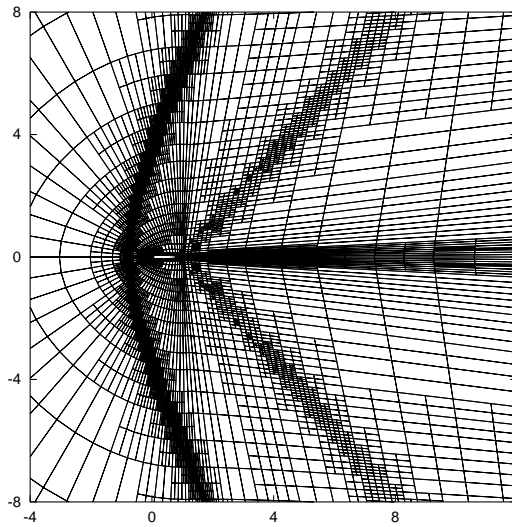
Zur effizienten und genauen Berechnung von  $J(\mathbf{u}) = c_{dp}$ :

Wie sollte das Gitter hierzu aussehen?

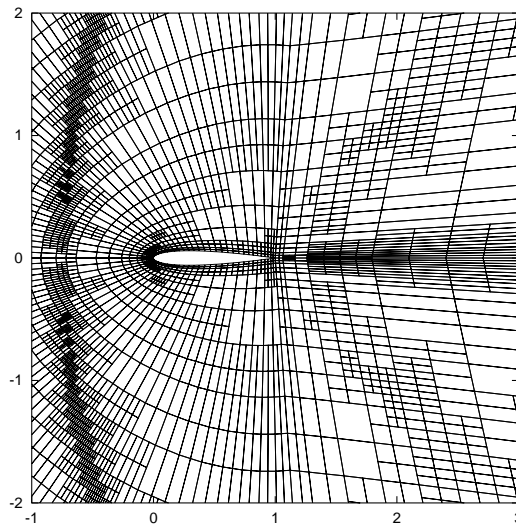
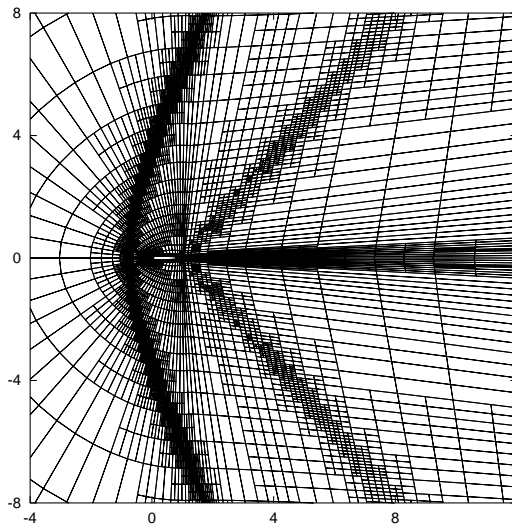




**Residuen-basierte Verfeinerung**  
**17670 Zellen mit 282720 DoFs**  
**Fehler in  $c_{dp}$  :  $1.9 \cdot 10^{-3}$**   
**Fehler in  $c_{df}$  :  $1.1 \cdot 10^{-2}$**





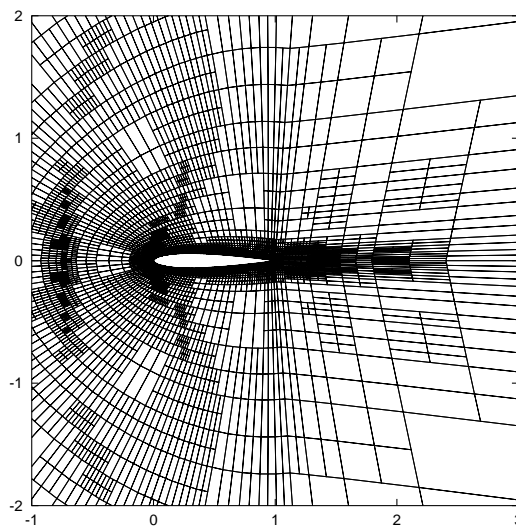
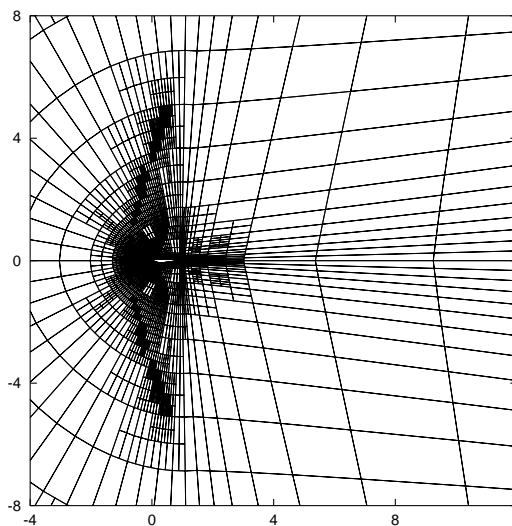


**Residuen-basierte Verfeinerung:**

**17670 Zellen mit 282720 DoFs**

**Fehler in  $c_{dp}$  :  $1.9 \cdot 10^{-3}$**

**Fehler in  $c_{df}$  :  $1.1 \cdot 10^{-2}$**



**Ziel-orientierte Verfeinerung:**

**10038 Zellen mit 160608 DoFs**

**Fehler in  $c_{dp}$  :  $1.6 \cdot 10^{-4}$**

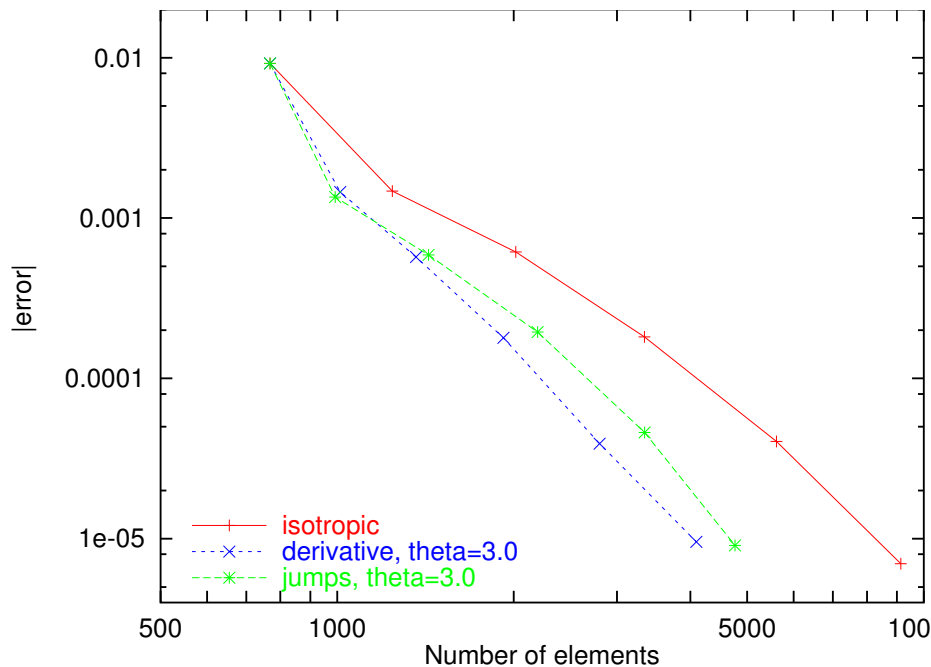
**Fehler in  $c_{df}$  :  $7.2 \cdot 10^{-4}$**



# Anisotrope Verfeinerung

Nutze adjungiert-basierte Indikatoren um die zu verfeinernden Zellen auszuwählen, Entscheide basierend auf anisotropen Indikatoren für anisotropen Verfeinerungsfall.

Laminarer Testfall,  $M = 0.5$ ,  $Re = 5000$ ,  $\alpha = 0$  um NACA0012 Profil.



DG(2), d.h. 3. Ordnung,  
mit adjungiert-basierter  
Verfeinerung

Vergleich Fehler in  $c_{dp}$ :

- ▶ isotrope Verfeinerung
- ▶ anisotroper Sprungindikator
- ▶ anisotroper Ableitungsindikator (3. Ableitungen)



# Zusammenfassung

## Discontinuous Galerkin Diskretisierung höherer Ordnung für die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

- ▶ Dieselbe Genauigkeit auf gröberen Gittern und weniger Rechenaufwand als für Verfahren 2. Ordnung
- ▶ Genaue Fehlerschätzung bzgl. Zielfunktionale
- ▶ Effiziente adjungiert-basierte (ziel-orientierte) adaptive Gitterverfeinerung
- ▶ Anisotrope Verfeinerung:
  - zur Auflösung von anisotropen Strömungsphänomenen (Schocks, Randschichten)
  - Automatische Generierung von "optimalen" ersten Wandabständen
  - Optimierung von Gittern mit ungeeigneten/schlechten Aspect ratios.



# Die nächsten Schritte in Richtung industrieller Anwendung

- ▶ Erweiterung des Strömungslösers
  - auf drei-dimensionale turbulente Strömungen mit hoher Reynoldszahl
- ▶ Diese Erweiterung auch für
  - die Berechnung der Adjungierten und der Adjungiert-adjungierten
  - die Auswertung von Verfeinerungsindikatoren (residuen-basiert und adjungiert-basiert)
  - und die Fehlerschätzung bzgl. aerodynamischer Kraftkoeffizienten
- ▶ Fehlerschätzung und adaptive Verfeinerung bzgl. mehrerer Zielfunktionale
- ▶ Erweiterung auf hybride Gitter
- ▶ Erweiterung auf hp-Verfeinerung
- ▶ Effiziente Lösungsalgorithmen
  - lineare and nonlineare Mehrgitter
  - h- und p- Mehrgitter





# **EU Project: ADIGMA**

**Adaptive Higher-Order Variational Methods  
for Aerodynamic Applications in Industry**

**Start war 1. Sept 2006**

<b>Koordinator:</b>	<b>DLR</b>
<b>Industrie:</b>	<b>Airbus-D, Airbus-F, Dassault, Alenia, EADS-M</b>
<b>Forschungsinstitute:</b>	<b>DLR, ONERA, NLR, FOI, INRIA, VKI</b>
<b>Universitäten:</b>	<b>Uni Bergamo, Uni Twente, Uni Swansea, Uni Nottingham Uni Stuttgart, Uni Warsaw, Uni Prague, ENSAM, (Uni Nanjing)</b>
<b>SMEs:</b>	<b>ARA, CENAERO</b>

**Hauptsächlich Discontinuous Galerkin Verfahren, Mehrgitter, Newton-Verfahren,  
Adaption, Fehlerschätzung, anisotrope Verfeinerung, hp-Verfeinerung.**

